COLEGIUL NAŢIONAL „ŞTEFAN CEL MARE" SUCEAVA

Concursul Centrelor de Excelenţă
,,CĂTĂLIN ŢIGĂERU"
Ediţia XVII, Suceava, 18 mai 2019

Clasa a IX-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Să se demonstreze că $\dfrac{2a}{a^2+bc}+\dfrac{2b}{b^2+cd}+\dfrac{2c}{c^2+da}+\dfrac{2d}{d^2+ab}\leq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$, pentru orice numere $a,b,c,d\in(0,\infty)$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie şi barem: Întâi vom arăta că $\frac{4a}{a^2+bc}\leq\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\forall a,b,c>0$. Această inegalitate este echivalentă cu inegalitatea $(b+c)a^2-4bca+bc(b+c)\geq 0$, care este adevărată pentru orice $a,b,c>0$ deoarece $\Delta=4bc\left[4bc-(b+c)^2\right]^2=-4bc(b-c)^2\leq 0$. **5p**
Astfel au loc inegalităţile: $\frac{4a}{a^2+bc}\leq\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $\frac{4b}{b^2+cd}\leq\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, $\frac{4c}{c^2+da}\leq\frac{1}{d}+\frac{1}{a}$ şi $\frac{4d}{d^2+ab}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ pentru orice $a,b,c,d>0$. Prin adunare rezultă concluzia. **2p**

Problema 2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1=2$ şi $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1,\forall n\geq 1$. Demonstraţi că oricare doi termeni ai şirului dat sunt numere naturale prime între ele.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie şi barem: Se arată imediat prin inducţie că $a_n\in\mathbb{Z},\forall n\geq 1$, iar din $a_1=2$ şi $a_n^2-a_n+1=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, deducem că a_n este număr natural $\forall n\geq 1$. **2p**
Cum $a_2=3=1+a_1, a_3=7=1+a_1a_2$, arătăm inductiv că $a_n=1+a_1a_2\ldots a_{n-1},\forall n\geq 2$. .. **2p**
Considerăm doi termeni ai şirului a_n şi a_m şi presupunem $n>m\geq 1$. Fie d un divizor comun al acestora, deci $d/a_n, d/a_m$. Deducem că $d/\left(a_n-a_1a_2\ldots a_m\ldots a_{n-1}\right)$, adică $d/1$. **2p**
În concluzie, $d=1$, deci numerele a_n şi a_m sunt prime între ele. **1p**

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC cu lungimile laturilor $BC=a, AB=c<b=AC$. Notăm cu O şi R centrul, respectiv raza cercului circumscris triunghiului ABC, iar cu H ortocentrul acestuia. Arătaţi că dacă $b^2-c^2=2Ra$, atunci mijlocul segmentului $[OH]$ aparţine dreptei BC.

Marius Marchitan, Suceava

Soluţie şi barem: Din teorema sinusurilor avem $a=2r\sin A, b=2r\sin B, c=2R\sin C$. Atunci egalitatea $b^2-c^2=2Ra$ devine $\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A$. **1p**
Cum $\sin^2 B=\frac{1-\cos 2B}{2}$ şi $\sin^2 C=\frac{1-\cos 2C}{2}$, rezultă $\cos 2C-\cos 2B=2\sin A$. **1p**
Dar $\cos 2C-\cos 2B=-2\sin(C+B)\sin(C-B)=2\sin A\sin(B-C)$, de unde $\sin(B-C)=1$. Deducem că $B=\frac{\pi}{2}+C$ şi $A=\frac{\pi}{2}-2C$. **1p**
Unghiul B fiind obtuz, O este exterior triunghiului şi găsim că $\mu(\measuredangle AOC)=\pi-2C$, de unde

obţinem $\measuredangle OAC \equiv \measuredangle OCA \equiv \measuredangle ACB$. Rezultă că $OA \parallel BC$. **1p**
Fie D mijlocul segmentului $[OH]$. Atunci $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}$, unde A' este mijlocul segmentului $[BC]$. Rezultă că $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, deci $\overrightarrow{A'D} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. Deducem că $\overrightarrow{A'D}$ şi $\overrightarrow{OA}$ sunt vectori coliniari. **2p**
Cum $OA \parallel BC$ deducem că $\overrightarrow{A'D}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt vectori coliniari, deci $D \in BC$. **1p**

Notă: *Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.*