COLEGIUL NAŢIONAL „ŞTEFAN CEL MARE” SUCEAVA

Concursul Centrelor de Excelenţă
„CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
Ediţia XVII, Suceava, 18 mai 2019

Clasa a X-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Demonstraţi inegalitatea $C_{m+n}^{\min(m,n)} \leq \sqrt{C_{2m}^m \cdot C_{2n}^n}$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

Gheorghe Stoica, Petroşani

Soluţie şi barem: Considerăm cazul $m \leq n$, celălalt caz justificându-se analog. Vom utiliza identitatea $C_{m+n}^k = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \cdots + C_m^k C_n^0$, pentru orice $0 \leq k \leq \min(m,n) = m$, obţinută prin identificarea coeficientului lui x^k în egalitatea $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n$, precum şi cazul său particular $C_{2p}^p = \left(C_p^0\right)^2 + \left(C_p^1\right)^2 + \cdots + \left(C_p^p\right)^2$. **2p**

Observăm că $\left(C_{m+n}^{\min(m,n)}\right)^2 = \left(C_{m+n}^m\right)^2 = \left(C_m^0 C_n^m + C_m^1 C_n^{m-1} + \cdots + C_m^m C_n^0\right)^2$ **1p**

Aplicând inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* obţinem:

$\left(C_m^0 C_n^m + C_m^1 C_n^{m-1} + \cdots + C_m^m C_n^0\right)^2 \leq \left[\left(C_m^0\right)^2 + \cdots + \left(C_m^m\right)^2\right] \left[\left(C_n^0\right)^2 + \cdots + \left(C_n^m\right)^2\right]$ **2p**

Dar $\left(C_n^0\right)^2 + \cdots + \left(C_n^m\right)^2 \leq \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \cdots + \left(C_n^m\right)^2 + \left(C_n^{m+1}\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$, iar $\left(C_m^0\right)^2 + \cdots + \left(C_m^m\right)^2 = C_{2m}^m$, de unde rezultă concluzia. **2p**

Soluţie alternativă: Prin ridicare la pătrat, simplificări şi efectuarea calculelor obţinem că în cazul $m < n$ (pentru $m = n$ are loc egalitatea) inegalitatea cerută este echivalentă cu inegalitatea $(2m+1)(2m+2)\ldots(m+n) \leq (m+n+1)(m+n+2)\ldots(2n)$, care este evident adevărată.

Problema 2. Calculaţi partea întreagă numărului $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt{\frac{2}{n}}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie şi barem: Evident $1 < \sqrt[n]{n+1} < 2$, deoarece $2^n > n+1, \forall n \geq 2$ **2p**

Pe de altă parte $-1 \leq -\sqrt{\frac{2}{n}} < 0$, de unde $0 < a_n < 2, \forall n \geq 2$ **1p**

Vom arăta că $a_n < 1$, adică $\sqrt[n]{n+1} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$, ceea se scrie echivalent $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n > n+1, \forall n \geq 2$.

Folosind eventual binomul lui Newton, avem că $(1+a)^n \geq 1 + na + C_n^2 a^2, \forall a > 0$ şi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Astfel $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n}$, de unde rezultă $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n \geq n + \sqrt{2n}$. Dar $n + \sqrt{2n} > n+1$, ceea ce conduce la inegalitatea $a_n < 1$ **3p**

În concluzie, $0 < a_n < 1$, deci $[a_n] = 0, \forall n \geq 2$ **1p**

Problema 3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ şi $(b_n)_{n \geq 1}$ două progresii, prima aritmetică, a doua geometrică, ambele neconstante, cu termeni strict pozitivi, astfel încât $a_1 = b_1$ şi $a_{2019} = b_{2019}$. Determinaţi mulţimea $C = \{k \in \mathbb{N}^* / a_k \leq b_k\}$ şi arătaţi că există o funcţie bijectivă $f : C \to \mathbb{N}$.

Gheorghe Rotariu, Dorohoi

Soluţie şi barem: Evident $\{1, 2019\} \subseteq C$. Fie r raţia progresiei aritmetice şi q raţia progresiei geometrice. Observăm că $r \neq 0, q \neq 1$ deoarece cele două progresii sunt neconstante. Evident $r > 0$ deoarece, în caz contrar, pentru n suficient de mare, $a_n < 0$. De asemenea, $q > 0$ deoarece, în caz contrar, progresia nu ar mai avea toţi termenii pozitivi. **1p**
Din ipoteza $a_{2019} = b_{2019}$ obţinem $a_1 + 2018r = b_1 q^{2018}$. Cum $a_1 = b_1$ găsim $r = \frac{a_1(q^{2018}-1)}{2018}$. Deoarece $r, a_1 > 0$ deducem $q^{2018} > 1$, deci $q > 1$. **1p**
Vom arăta că dacă $k \in \{2, 3, \ldots, 2018\}$, atunci $a_k > b_k$. Fie pentru aceasta $k \in \{2, 3, \ldots, 2018\}$. Din $a_k = a_1 + (k-1)r$ şi $r = \frac{a_{2019}-a_1}{2018}$, rezultă $a_k = \frac{(2019-k)a_1+(k-1)a_{2019}}{2018}$. Analog, pentru progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ obţinem $b_k = \sqrt[2018]{b_1^{2019-k} b_{2019}^{k-1}} = \sqrt[2018]{a_1^{2019-k} a_{2019}^{k-1}}$. **1p**
Aplicând inegalitatea mediilor în a_k pentru $2019 - k$ termeni egali cu a_1 şi $k - 1$ termeni egali cu a_{2019}, iar $a_1 \neq a_{2019}$, deducem că $a_k > b_k$. **1p**
Arătăm că $a_k < b_k, \forall k \geq 2020$. Fie $k \in \mathbb{N}, k \geq 2020$. Avem $a_k = a_1 + (k-1)r$, $b_k = b_1 q^{k-1} = a_1 q^{k-1}$, iar $r = \frac{a_1(q^{2018}-1)}{2018}$. Prin calcul se arată că inegalitatea $a_k < b_k$ este echivalentă cu inegalitatea $(k-1)q^{2018} < 2018q^{k-1} + (k - 2019)$. **1p**
Dar $2018q^{k-1} + (k-2019)$ este suma a $k-1$ termeni: 2018 termeni egali cu q^{k-1} şi $k-2019$ termeni egali cu 1, iar $q^{k-1} \neq 1$. Aplicând inegalitatea mediilor deducem că $2018q^{k-1} + (k - 2019) > (k-1)\sqrt[k-1]{(q^{k-1})^{2018}} = (k-1)q^{2018}$. În concluzie, $C = \{1\} \cup \{2019, 2020, 2021, \ldots\}$. **1p**
Un exemplu de funcţie bijectivă $f : C \to \mathbb{N}$ poate fi funcţia $f(1) = 0$ şi $f(k) = k-2018, \forall k \geq 2019$. Alternativ, se poate justifica existenţa bijecţiei prin faptul că $C \subseteq \mathbb{N}$ este cel mult numărabilă şi fiind infinită este numărabilă. **1p**

Notă: *Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.*