Concursul Centrelor de Excelenţă
,,CĂTĂLIN ŢIGĂERU"
Ediţia XVII, Suceava, 18 mai 2019

COLEGIUL NAŢIONAL „ŞTEFAN CEL MARE" SUCEAVA

Clasa a XI-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N}^*)$ cu proprietatea că suma pătratelor celor patru elemente ale sale este număr prim. Arătaţi că A este inversabilă.

Gheorghe Stoica, Petroşani

Soluţie şi barem: Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N}^*)$ cu $a^2+b^2+c^2+d^2$ număr prim şi presupunem că A nu este inversabilă. Rezultă că $ad = bc$. **1p**
Arătăm că dacă $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$ cu $ad = bc$ atunci există $x,y,z,t \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = xy, b = yz, c = xt, d = zt$. Fie pentru aceasta $y = (a,b)$ şi $t = (c,d)$. Rezultă că $a = a_1 y, b = b_1 y$ cu a_1, b_1 prime între ele şi analog $c = c_1 t, d = d_1 t$ cu c_1, d_1 prime între ele. Din egalitatea $ad = bc$ deducem că $a_1 d_1 = b_1 c_1$. Cum $a_1 / b_1 c_1$ şi $(a_1, b_1) = 1$, rezultă a_1 / c_1. Analog c_1 / a_1, deci $a_1 = c_1 = x$. La fel $b_1 = d_1 = z$, de unde $a = xy, b = yz, c = xt, d = zt$. **2p**
Obţinem că $a^2+b^2+c^2+d^2 = x^2y^2+y^2z^2+x^2t^2+z^2t^2 = (x^2+z^2)(y^2+t^2)$. **2p**
Dar $x^2+z^2 \geq 2$ şi $y^2+t^2 \geq 2$, deci $a^2+b^2+c^2+d^2$ nu este număr prim, contradicţie. Rezultă că presupunerea e falsă, deci A este inversabilă. **2p**

Problema 2. Fie $a,b \in \mathbb{R}$ cu $0 < a < b$. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile $x_2 > x_1 > 0$ şi $ax_{n+2} + bx_n \geq (a+b)\,x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie şi barem: Din enunţ se deduce că $a(x_{n+2} - x_{n+1}) \geq b(x_{n+1} - x_n)$. Demonstrăm prin inducţie că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Astfel, $x_2 > x_1$ din ipoteză şi dacă $x_{n+1} > x_n$, atunci $x_{n+2} - x_{n+1} \geq \frac{b}{a}(x_{n+1} - x_n) > 0$, adică $x_{n+2} > x_{n+1}$. **2p**
Din monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ deducem existenţa limitei sale. Presupunem că şirul este mărginit superior, deci el este convergent şi fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci şirul $(y_n)_{n\geq 1}, y_n = x_{n+1} - x_n, n \geq 1$ este convergent şi are limita egală cu 0. .... **2p**
Pe de altă parte, $y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} \geq \frac{b}{a}(x_{n+1} - x_n) > x_{n+1} - x_n = y_n, \forall n \geq 1$. Rezultă că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci limita sa există şi este mai mare decât $y_1 = x_2 - x_1 > 0$, adică nu poate fi egală cu 0, contradicţie. **2p**
Deducem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător nemărginit, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. **1p**

Problema 3. Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale şi $f, g : I \to J$ două funcţii derivabile. Spunem că f şi g au proprietatea $\mathcal{P}$ dacă $[f(x)g(x)]' = f'(x)g'(x), \forall x \in I$.
a) Daţi exemplu de două funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, neconstante care au proprietatea $\mathcal{P}$.
b) Pentru $I = (2019, \infty), J = (0, \infty)$ şi $g : I \to J, g(x) = x^{2019}$, determinaţi $f : I \to J$ derivabilă, astfel încât f şi g să aibă proprietatea $\mathcal{P}$.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie şi barem: a) Putem lua $f(x) = g(x) = e^{2x}$ şi se arată că au proprietatea $\mathcal{P}$ **2p**
b) Proprietatea $\mathcal{P}$ se rescrie sub forma $[f(x) \cdot x^{2019}]' = f'(x) \cdot 2019 \cdot x^{2018}$ **1p**
Obţinem că $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2019}{x-2019}, \forall x \in I$. Deducem că $[\ln f(x)]' = -2019[\ln(x-2019)]'$, de unde găsim că $\ln f(x) = \ln(x-2019)^{-2019} + \ln c$, unde $c > 0$ **3p**
Rezultă că $f(x) = \frac{c}{(x-2019)^{2019}}$, cu $c > 0$, funcţie ce verifică cerinţa **1p**

Notă: *Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.*