COLEGIUL NAȚIONAL „ȘTEFAN CEL MARE" SUCEAVA

Concursul Centrelor de Excelenţă „CĂTĂLIN ŢIGĂERU"
Ediţia XVII, Suceava, 18 mai 2019

CLASA a V-a

1. Determinați cel mai mic număr natural nenul *n* cu proprietatea că 27^{27} este suma pătratelor a *n* numere naturale.

Ioan Viorel Codreanu,Satulung, Maramureș și Mircea Lascu, Zalău

Soluție: Putem scrie27^{27} ca sumă de trei pătrate perfecte astfel:

$$27^{27}=27\cdot 27^{26}=(5^2+\ 1^2+1^2)\cdot(27^{13})^2=(5\cdot 27^{13})^2+(27^{13})^2+(27^{13})^2.$$

Deoarece $27^{27}=3^{81}$, rezultă că 27^{27} nu este pătrat perfect, deci $n=1$ nu verifică cerința.

Arătăm că numărul 27^{27} nu se scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

Deoarece pătratul unui număr natural este de forma *M*4 sau *M*4+1, avem

$$a^2+b^2=M4, M4+1\ sau\ M4+2.$$

Pe de altă parte, avem $27^{27}=(28-1)^{27}$ =*M*4-1=*M*4+3.

Așadar, minimul căutat este 3.

Barem:

Scrie numărul 27^{27} ca sumă de trei pătrate perfecte	2p
Justifică că $n=1$ nu convine Justifică faptul că numărul 27^{27} nu se scrie ca sumă de două pătrate perfecte	1p 3p
Finalizare: minimul căutat este 3	1p

2. Un numărnatural de trei cifre distincte $\overline{abc}$, $a>b>c$ se numește *invariant* dacă diferența dintre el și răsturnatul său este un număr natural de trei cifre distincte format tot cu cifrele
a, *b* și *c*. Câte numere *invariante* există?

Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoșani

Soluție:$\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{xyz}$, unde $\{a,b,c\}=\{x,y,z\}$.

Efectuând diferența din membrul stâng, avem: $z=10+c-a$, $y=9+b-b=9$,

$$x=a-1-c.$$

Cum *y*=9 este cea mai mare cifră din sistemul zecimal și cum $a>b>c$, rezultă că *y*=9=*a*.

Pe de altă parte, adunând membru cu membru egalitățile de mai sus, obținem:

$$x+y+z=a-1-c+9+10+c-a=18.$$

De aici, $x+z=b+c=9$.

Analizând cazurile $b+c=9$, $b>c$, singura situație convenabilă este *b*=5, *c*=4.

Avem un singur număr *invariant*: *n*=954.

Barem:

Scrie relația $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{xyz}$, unde $\{a,b,c\}=\{x,y,z\}$.	1p
Obține : $z=10+c-a$, $y=9+b-b=9$, $x=a-1-c$, *y*=9=*a*.	3p
Adună și obține: $x+y+z=a-1-c+9+10+c-a=18$, $x+z=b+c=9$.	1p
Analizează cazurile $b+c=9$, $b>c$, și găsește singura situație convenabilă *b*=5, *c*=4.	1p
Determină *n*=954.	1p

3. Numărul naturalîn baza 10, $n = \overline{201920019200019 \ldots x}$, se obține lipind consecutiv un număr finit de termeni din șirul $2 \cdot 10^3 + 19$, $2 \cdot 10^4 + 19$, $2 \cdot 10^5 + 19$, ș.a.m.d.

a) În caz că există, care este a 100-cifră a lui *n*?

b) Dacă suma primelor *m* cifre ale lui *n* este 110, să se determine *m*

Mariana-Liliana Popescu, Suceava

Soluție:a) Impunând condiția $4+5+6+\ldots+m \le 99$, adică $\frac{m(m+1)}{2} - 6 \le 99$, se obține că

$m \le 14\left(14 \cdot 15 = 210,\ \text{iar}\ m(m+1) > 210,\ \forall m > 14\right)$.

Dacă se scriu doar primele 99 de cifre din *n*, se vor folosi cifrele numerelor

$2 \cdot 10^3 + 19,\ 2 \cdot 10^4 + 19, \ldots,\ 2 \cdot 10^{13} + 19$. Evident, a 100-a cifră a lui *n* va fi 2, adică prima dintre cifrele numărului $2 \cdot 10^{14} + 19$.

b) Din teorema împărțirii cu rest, $110 = 9 \cdot 12 + 2$, iar fiecare număr $2 \cdot 10^k + 19$ are suma cifrelor 12, $3 \le k$. Atunci se folosesc toate cifrelr numerelor: $2 \cdot 10^3 + 19,\ 2 \cdot 10^4 + 19,\ \ldots,\ 2 \cdot 10^{11} + 19$, iar din numărul $2 \cdot 10^{12} + 19$ se va folosi doar cifra 2 și oricâte cifre 0 din cele 10 următoare. Cum $4+5+6+\ldots+12 = 72$, *m* satisface $73 \le m \le 83$.

Barem:

a) Impune condiția $4+5+6+\ldots+m \le 99$, adică $\frac{m(m+1)}{2} - 6 \le 99$ și obține $m \le 14$.	1p
Specifică că se vor folosi cifrele numerelor $2 \cdot 10^3 + 19,\ 2 \cdot 10^4 + 19, \ldots,\ 2 \cdot 10^{13} + 19$.	1p
Finalizează: a 100-a cifră va fi 2, adică prima dintre cifrele numărului $2 \cdot 10^{14} + 19$.	1p
b) Din teorema împărțirii cu rest, $110 = 9 \cdot 12 + 2$, iar fiecare număr $2 \cdot 10^k + 19$ are suma cifrelor 12, $3 \le m$.	2p
Se folosesc cifrele numerelor $2 \cdot 10^3 + 19,\ 2 \cdot 10^4 + 19,\ \ldots,\ 2 \cdot 10^{11} + 19$, iar din numărul $2 \cdot 10^{12} + 19$ se va folosi doar cifra 2 și oricâte cifre 0 din cele 10 următoare.	1p
Finalizare: *m* satisface $73 \le m \le 83$.	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.