COLEGIUL NAŢIONAL „ŞTEFAN CEL MARE” SUCEAVA

# Concursul Centrelor de Excelenţă „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
## Ediţia XVII, Suceava, 18 mai 2019

## CLASA a VI-a

1. Determinați numerele de forma $\overline{xy}$, astfel încât: $1+2+...+(x+y)=\dfrac{\overline{xy}+\overline{yx}}{2}$.

*Gheorghe Stoica, Petroșani*

**Soluție:** Fie $x+y=t\geq 2$.Cum $\dfrac{\overline{xy}+\overline{yx}}{2}=\dfrac{10x+y+10y+x}{2}=\dfrac{11(x+y)}{2}=\dfrac{11t}{2}$,

Relația devine: $\dfrac{t(t+1)}{2}=\dfrac{11t}{2}\Leftrightarrow t+1=11\Leftrightarrow t=10\Leftrightarrow x+y=10$.

Cum $x$ şi $y$ sunt cifre nenule rezultă că $\overline{xy}\in\{19,28,37,46,55,64,73,82,91\}$.

**Barem:**

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\overline{xy}+\overline{yx}}{2}=\dfrac{10x+y+10y+x}{2}=\dfrac{11(x+y)}{2}=\dfrac{11t}{2}$ | 2p |
| $\dfrac{t(t+1)}{2}=\dfrac{11t}{2}\Leftrightarrow t+1=11\Leftrightarrow t=10\Leftrightarrow x+y=10$. | 2p |
| $\overline{xy}\in\{19,28,37,46,55,64,73,82,91\}$. | 3p |

**2.** Determinați numărul natural $A$ care are cel puțin patru divizori naturali și care verifică egalitatea $A=5d_1^3+5d_2^3+d_3^2+d_4^2$, unde $d_1,d_2,d_3,d_4$ sunt cei mai mici divizori naturali ai lui $A$ $(d_1<d_2<d_3<d_4)$.

*Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoșani*

**Soluție:** Evident, $d_1$=1.
Dacă $A$ ar fi număr impar, atunci toți divizorii săi ar fi impari, deci $A=5d_1^3+5d_2^3+d_3^2+d_4^2$ este număr par, contradicție cu faptul că $A$ este număr impar. Prin urmare $A$ este număr par, deci $d_2=2$.
Pentru ca suma $5d_1^3+5d_2^3+d_3^2+d_4^2$ să fie pară, $d_3$ și $d_4$ trebuie să fie unul par, iar celălalt impar.
Dacă $d_4$ este impar, atunci $d_3$ fiind par, nu poate fi decât $2^2=4$.
Deoarece $d_4$ este număr (prim) impar, pătratul său are forma $M4$+1. Atunci însă,
$5d_1^3+5d_2^3+d_3^2+d_4^2$=5+40+16+ $M4$+1= $M4$+2. Dar, numărul $A$ având ca divizor pe 4 este $M4$, contradicție. Prin urmare, $d_3$ este impar, iar $d_4=2^k, k\in\mathbb{N}, k\geq 2$ sau $d_4=2d_3$.
Arătăm că, de fapt, prima situație nu poate avea loc.

Dacă $d_4 = 2^k, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, atunci 4 divide pe *A*. În acest caz, $d_3$=3. Numărul *A* este, în acest caz, *A*=5+40+9+16=70, contradicție, deoarece $70 \not\vdots 3$.

Prin urmare, $d_4$=2$d_3$. Atunci:

$A = 5d_1^3 + 5d_2^3 + d_3^2 + d_4^2 = 5 + 40 + 5d_3^2 = 5(9 + d_3^2)$.

Rezultă că 5 divide pe *A*. Dacă $5 \neq d_3$, atunci $d_3$ =3.

Avem $d_4$=2$d_3$=6, contradicție cu faptul că 5 divide pe $a$. Prin urmare $d_3 = 5$, iar $d_4$ =2$d_3$=10.

În concluzie, $A = 5d_1^3 + 5d_2^3 + d_3^2 + d_4^2$=5+40+25+100=170.

**Barem:**

| | |
|---|---|
| $d_1$=1 | 1p |
| Dacă A ar fi număr impar, atunci toți divizorii săi ar fi impari, deci $A = 5d_1^3 + 5d_2^3 + d_3^2 + d_4^2$ este număr par, contradicție cu faptul că *A* este număr impar. Prin urmare A este număr par, deci $d_2 = 2$. | 2p |
| Justificarea faptului că $d_3 = 5$, iar $d_4$ =2$d_3$=10. | 3p |
| Determină numărul 170. | 1p |

**3.** Se consideră triunghiul $ABC$ cu $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$ și $AB + AC = 2BC$. Demonstrați că triunghiul $ABC$ este echilateral.

*Dan Nedeianu, Dr. Tr. Severin*

**Soluție:** Se observă că dacă $AB = AC$, atunci $\Delta ABC$ este isoscel cu un unghi de $60^\circ$, deci echilateral.

Presupunem prin reducere la absurd că $\Delta ABC$ nu este echilateral. Atunci $AB < AC$ sau $AB > AC$.

Considerăm prima situație și atunci rezultă $AB < BC < AC$.

În acest caz considerăm $M \in [AC]$ și $N$ pe prelungirea lui $[AB]$, cu $B \in [AN]$, astfel ca $AM = BC < AC$ și $AN = BC > AB$. Triunghiul $AMN$ devine echilateral (căci $AM = AN = BC$ și $m(\sphericalangle MAN) = 60^\circ$) $\Rightarrow MN = BC$.

Apoi $BN = AN - AB = BC - AB = AC - BC = AC - AM = MC$.

Pe de altă parte se deduce că $\triangle BMN \equiv \triangle MBC$ (L.L.L.) $\Rightarrow m(\sphericalangle BCM) = m(\sphericalangle BNM) = m(\sphericalangle ANM) = 60^\circ$, adică $m(\sphericalangle BCA) = 60^\circ$, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

**Barem:**

| | |
|---|---|
| Presupune $AB < AC$ și realizează construcția: $M \in [AC]$ și $N$ pe prelungirea lui $[AB]$, cu $B \in [AN]$, astfel ca $AM = BC < AC$ și $AN = BC > AB$. | 1p |
| Triunghiul $AMN$ echilateral $\Rightarrow MN = BC$. | 2p |
| $BN = AN - AB = BC - AB = AC - BC = AC - AM = MC$. | 1p |
| $\triangle BMN \equiv \triangle MBC$ (L.L.L.) $\Rightarrow m(\sphericalangle BCM) = m(\sphericalangle BNM) = m(\sphericalangle ANM) = 60^\circ$, adică $m(\sphericalangle BCA) = 60^\circ$, contradicție. | 3p |

***Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.***