COLEGIUL NAȚIONAL „ȘTEFAN CEL MARE” SUCEAVA

Concursul Centrelor de Excelență „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”

Ediţia XVII, Suceava, 18 mai 2019

CLASA a VII-a

1a) Dați exemplu de trei numere naturale $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, distincte două câte două astfel ca $\sqrt{a^2+b+c}$ și $\sqrt{b^2+c+a}$ să fie numere raționale.

b) Demonstrați că dacă $\sqrt{a^2+b+c}$ și $\sqrt{b^2+c+a}$ sunt numere raționale, atunci $\sqrt{c^2+a+b}$ este număr irațional.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

Soluție: a)Alegem numerele: $a=6,\ b=3,\ c=10$.

Pentru a găsi un astfel de exemplu, avem $a^2+b+c=x^2,\ b^2+c+a=y^2$

$\Rightarrow a^2-b^2+b-a=x^2-y^2 \Rightarrow (a-b)(a+b-1)=x^2-y^2$.

Putemconsidera $x=7, y=5 \Rightarrow (a-b)(a+b-1)=24$ șialegem $a-b=3, a+b-1=8 \Rightarrow a=6, b=3$. Se deduce $c=10$.

Probă : $\sqrt{a^2+b+c}=\sqrt{36+3+10}=7\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{b^2+c+a}=\sqrt{9+10+6}=5\in\mathbb{Q}$.

b) Dacă, prin absurd, $\sqrt{c^2+a+b}\in\mathbb{Q} \Rightarrow c^2+a+b$ estepătrat perfect. Din enunțșinumerele a^2+b+c, b^2+c+a sunt pătrateperfecte.

Prinurmare, $a^2+b+c\geq(a+1)^2 \Rightarrow b+c\geq 2a+1$.

Analog $a+c\geq 2b+1$ și $a+b\geq 2c+1$.

Prinadunare se obținecontradicția $2(a+b+c)\geq 2(a+b+c)+3$.

Barem:

Găsește trei numere cu proprietatea cerută	3p
Presupune, prin reducere la absurd, $\sqrt{c^2+a+b}\in\mathbb{Q} \Rightarrow c^2+a+b \Rightarrow c^2+a+b\geq(c+1)^2$ Deduce că $a+b\geq 2c+1$ și inegalitățile analoage și obține contradicția	2p 2p

2. Pe o masă se află 77 jetoane colorate în roșu, 75 jetoane colorate în galben, 73 jetoane colorate în albastru și 71 jetoane colorate în verde. O *mutare* înseamnă alegerea a trei jetoane de culori diferite și vopsirea lor în cea de-a patra culoare. Se poate ajunge după un număr finit de *mutări* la o configurație în care toate jetoanele sunt vopsite la fel? Justificați răspunsul dat.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureș
și Mircea Lascu, Zalău

<u>Soluție</u>:Răspunsul este negativ. Notăm cu r,g,a,v numărul jetoanelor vopsite în roșu, galben, albastru și verde la un moment dat. Pornind de la (r,g,a,v), într-o mutare putem ajunge la $(r+3,g-1,a-1,v-1),(r-1,g+3,a-1,v-1),(r-1,g-1,a+3,v-1)$ sau $(r-1,g-1,a-1,v+3)$ .Observăm că diferențele $(r+3)-(g-1)\equiv(r-1)-(g+3)\equiv(r-1)-(g-1)\equiv r-g \pmod 4$, deci restul împărțirii la 4 a diferenței primelor două tipuri de jetoane este invariant. Dar inițial acest rest este 2, iar în final ar trebui să fie 0, deoarece $296-0\equiv 0(\bmod 4)$ sau $0-296\equiv 0(\bmod 4)$ sau $0-0\equiv 0(\bmod 4)$.

Barem:

Răspunsul este negativ	**1p**
Găsește invariantul la o mutare	**4p**
Justificare raspuns	**2p**

3. Fie triunghiul *ABC* și dreptele *b*, *c* din planul triunghiului astfel ca $B\in b,\ b\parallel AC;\ C\in c,\ c\parallel AB$. O dreaptă variabilă *a* conține punctul *A*, nu conține nici *B* și nici *C*, dar intersectează *b* în *M* și *c* în *N*. Dacă $M\neq N$, să se demonstreze că produsul $MB\cdot NC$ este constant.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: a) Dacă $b\cap c=\{O\}$, *ABOC* este paralelogram. Pentru a determina constanta este suficientă analiza poziției $a\parallel BC$, caz în care $MB\cdot NC=AC\cdot AB$ (*AMBC* și *ANBC* fiind paralelograme).

Cum $O\notin a$, fie $N\in(OC)$ și, în consecință, $O\in(BM)$. În acest caz au loc asemănările $\Delta MON\sim\Delta MBA, \Delta MON\sim\Delta ACN$, de unde $\frac{MO}{MB}=\frac{NO}{AB}$ și $\frac{MO}{AC}=\frac{ON}{NC}$, relații care dau $\frac{MB\cdot NC}{AC\cdot AB}=1$, adică $MB\cdot NC=AB\cdot AC$. Analog se tratează cazul $M\in(OB), O\in(NC)$.

În situația $a\cap[BC]=\varnothing$ putem avea și cazul $B\in(OM)$ și $C\in(ON)$. Are loc asemănarea $\Delta MAB\sim\Delta MNO$, de unde $\frac{MB}{MO}=\frac{AB}{NO}\Leftrightarrow\frac{MB}{MB+OB}=\frac{AB}{NC+CO}$. Dar $CO=AB, BO=AC$, de unde deducem $MB\cdot NC=AB\cdot AC$.

Barem:

Tratarea unuia dintre cazurile $N\in(OC), O\in(BM)$ sau $M\in(OB), O\in(NC)$ sau $B\in(OM),\ C\in(ON)$	5p
Precizarea existenței celorlalte două cazuri	2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.