COLEGIUL NAȚIONAL „ȘTEFAN CEL MARE” SUCEAVA

Concursul Centrelor de Excelență „CĂTĂLIN ȚIGĂERU” Ediția XVII, Suceava, 18 mai 2019

CLASA a VIII-a

1.Determinați numerele întregi $x, y \in \mathbb{Z}$ care verifică relația $\left(x^2+y^2\right)(x+y)=x^2y^2(x+y-2)$.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

Soluție: Notăm $s=x+y, p=xy$ și obținem:

$\left(s^2-2p\right)s=p^2(s-2) \Leftrightarrow s^3-2ps-p^2s+2p^2=0 \Leftrightarrow (s-p)\left(s^2+sp-2p\right)=0$.

Cazul I: $s=p \Leftrightarrow x+y=xy \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=1 \Leftrightarrow x=y=0$ sau $x=y=2$.

Cazul II: $s^2+sp-2p=0 \Leftrightarrow p=\dfrac{-s^2}{s-2}$(. $s=2$. nu verifică relația). Din condiția $p \in \mathbb{Z}$ obținem

$(s-2)/4 \Leftrightarrow s \in \{-2,0,1,3,4,6\}$. Avem:

$s=-2 \Rightarrow p=1 \Rightarrow x=y=-1$;

$s=0 \Rightarrow p=0 \Rightarrow x=y=0$; Celelalte cazuri nu furnizează soluții întregi.

Mulțimea soluțiilor este $\{(-1,-1),(0,0),(2,2)\}$.

Barem:

Deduce $(s-p)\left(s^2+sp-2p\right)=0$	3p
Rezolvarea cazului I	2p
Rezolvarea cazului al II-lea	2p

2. Considerăm mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,k\}, k \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că, pentru $k \geq 64$, există o submulțime $X \subset A$, având 13 elemente, cu proprietatea că, oricum alegem două elemente $a,b \in X, a<b$, avem $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{3}{4}$.

b) Determinați cel mai mare număr natural k cu proprietatea că, pentru orice submulțime $Y \subset A$, având 14 elemente, există două elemente $a,b \in Y, a>b$, astfel încât $\dfrac{a}{b}<\dfrac{4}{3}$.

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluție:a) Un exemplu de submulțime este $X=\{1,2,3,4,6,8,11,15,20,27,36,48,64\}$.

b) Fie $Y=\{a_1,a_2,\ldots,a_{14}\} \subset A$, cu $a_1<a_2<\ldots<a_{14}$. Presupunem că $\dfrac{a_i}{a_j} \geq \dfrac{4}{3}, \forall i>j$.

Atunci: $a_2 \geq \dfrac{4}{3}a_1 \geq \dfrac{4}{3} \Rightarrow a_2 \geq 2$; $a_3 \geq \dfrac{4}{3}a_2 \geq \dfrac{8}{3} \Rightarrow a_3 \geq 3$; $a_4 \geq 4, a_5 \geq 6, a_6 \geq 8, a_7 \geq 11, \ldots, a_{13} \geq 64, a_{14} \geq 86$.

Deci valoarea maximă este $k=85$.

Barem:

a) Dă un exemplu de submulțime	3p
b) Rezolvarea cerinței	4p

3.Fie triunghiul *ABC* și $M \notin (ABC)$. Notăm cu A', B', C' proiecțiile lui *M* pe dreptele *BC*, *AC*, respectiv *AB* și presupunem că sunt diferite de vârfurile triunghiului *ABC*. Să se arate că dacă cercurile circumscrise triunghiurilor $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ sunt tangente interior cercului circumscris triunghiului *ABC* atunci $MA = MB = MC$ și $MA' \perp B'C'$, $MB' \perp A'C'$, $MC' \perp A'B'$.

Claudia Georgeta Marchitan, Suceava

Soluție: Fie M' proiecția punctului M pe planul triunghiului *ABC*. Din teorema celor trei perpendiculare obținem $M'A' \perp BC$, $M'B' \perp AC$, $M'C' \perp AB$.

Cum triunghiurile $M'B'A$ și $M'C'A$ sunt dreptunghice în M', cercul de diametru $[AM']$ trece prin B' și C', deci cercul circumscris triunghiului $AB'C'$ are centrul în A'', mijlocul lui $[AM']$ și trece și prin M'. Atunci cercul circumscris triunghiului $AB'C'$ este tangent interior cercului circumscris triunghiului *ABC* de centru *O* dacă și numai dacă $A'' \in (OA)$.

Analog, cercurile circumscrise triunghiurilor $BA'C'$ și $CB'A'$ au centrele în B'' și C'' care sunt mijloacele segmentelor $[BM']$, respectiv $[CM']$ și sunt tangente interior cercului circumscris triunghiului *ABC* de centru *O* dacă și numai dacă $B'' \in (OB)$, $C'' \in (OC)$.

Astfel rezultă că $\{O\} = AA'' \cap BB'' \cap CC'' = AM' \cap BM' \cap CM' = \{M'\}$, deci $M' = O$, centrul cercului circumscris triunghiului *ABC*. Atunci $AM' = BM' = CM'$ și din congruența triunghiurilor dreptunghice $MM'A$, $MM'B$, $MM'C$ deducem $MA = MB = MC$.

Pe de altă parte, observăm că $M'A'$, $M'B'$, $M'C'$ sunt mediatoarele laturilor triunghiului *ABC*, deci A', B', C' sunt mijloacele laturilor acestui triunghi. Rezultă că $B'C' \parallel BC$ și $MA' \perp BC$, de unde $MA' \perp B'C'$ și analoagele.

Barem:

Obținem $M'A' \perp BC$, $M'B' \perp AC$, $M'C' \perp AB$	1p
Demonstrează că $M' = O$	3p
Finalizare $MA = MB = MC$	1p
Finalizare $MA' \perp B'C'$ și analoagele	2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.