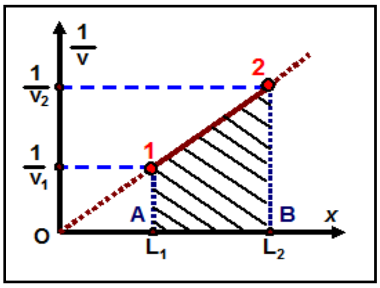
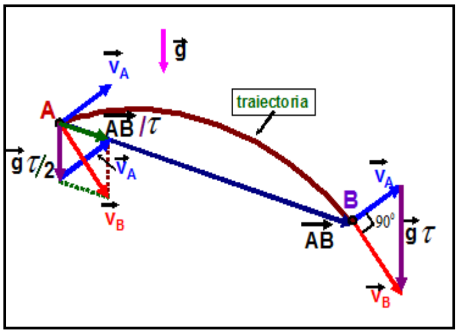
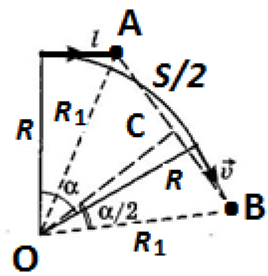
Subiect I (A+B) CINEMATICĂ	Parțial	Punctaj
Barem subiect I (A+B)		**10 p**
I A. O mișcare rectilinie		**5 puncte**
a.) Conform enunțului, în porțiunea de interes (**A – B – C**), viteza furnicii are forma $v = K/x$, în care x este spațiul parcurs (măsurat până la centrul mușuroiului) iar $K = v_1 \cdot L_1$ este o constantă.	0,50 p	
Dacă se reprezintă grafic mărimea $1/v$ (adică inversul vitezei) în funcție de x obținem dreapta $1/v = (1/K)x$, care trece prin origine, având panta $1/K$	0,50 p	
Localizăm pe această dreaptă stările (1) și (2). Aria trapezului care se formează este chiar timpul solicitat în enunț (în care furnica se deplasează din **A** în **B**). .... 	0,50 p	
Argumentare: Prin definiție viteza are forma $v = \Delta x/\Delta t$ și, de aici, $\Delta t = (1/v)\Delta x$. Cei doi factori din partea dreaptă a egalității corespund axelor sistemului în care s-a realizat reprezentarea grafică de mai sus.	0,50 p	
Avem expresia: $Aria = (\Delta t)_{12} = (1/2)(L_2 - L_1)(1/v_2 + 1/v_1) =$ $= (1/2K)(L_2^2 - L_1^2) = (L_2^2 - L_1^2)/(2v_1 L_1)$.	1 p	
Numeric obținem $(\Delta t)_{12} = 62{,}5\,s$.	0,50 p	
b.) Din relația $K = v_1 \cdot L_1 = v_2 \cdot L_2$ rezultă $v_2 = v_1(L_1/L_2) = (2/3)\cdot v_1 = 4/3\,cm/s \approx 1{,}33\,cm/s$.	0,50 p	
c.) Din relația $(\Delta t)_{23} = (\Delta t)_{12}$ scrisă sub forma $(L_3^2 - L_2^2)/(2v_2 L_2) = (L_2^2 - L_1^2)/(2v_1 L_1)$, găsim $L_3 = (2L_2^2 - L_1^2)^{1/2} = (18-4)^{1/2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74\,m$	1 p	
I B. O aruncare pe oblică		**4 puncte**
Putem scrie de la bun început relațiile $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{g}\tau$, ...	0,75 p	
$\overrightarrow{AB} = \vec{v}_A \cdot \tau + (\vec{g}/2)\cdot \tau^2$	0,75 p	
Din ultima relație îl extragem pe $\vec{v}_A$ sub forma $\vec{v}_A = \overrightarrow{AB}/\tau - (\tau/2)\vec{g}$, (*) pe care, introducându-l în prima relație, obținem 	0,50 p	
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{g}\tau = \overrightarrow{AB}/\tau + (\tau/2)\vec{g}$,(**) ...	0,50 p	
Astfel, pentru viteza $\vec{v}_A$, dată de relația (*), și pentru viteza $\vec{v}_B$ dată de relația (**), putem realiza reprezentarea din desenul alăturat.	0,50 p	
Când **suprapunem cele două imagini** (ca în partea stângă a desenului)		

figura obținută este un **romb** deoarece ***diagonalele sunt reciproc perpendiculare*** (afirmația din enunțul problemei)	**0,50 p**	
Pentru lungimea laturilor rombului putem scrie o egalitate de forma $AB/\tau=\tau\cdot g/2$ din care rezultă $AB=(g/2)\cdot\tau^2=45m$	**0,50 p**	
Altă metodă **[*valorează* 1,5 puncte; *celelalte* 2,5 puncte corespund relațiilor (*) și (**)]** *Deoarece vectorii $\vec{v}_B$ și $\vec{v}_A$* ***sunt reciproc perpendiculari*** *(conform enunțului),* ***produsul lor scalar este egal cu zero***. *Folosind expresiile* ***(*)*** *și* ***(**)*** *(deduse la început) relația $\vec{v}_A\cdot\vec{v}_B=0$ devine :* $\left(\overrightarrow{AB}/\tau\right)^2-\left(\vec{g}\,\tau/2\right)^2+\left(\overrightarrow{AB}/\tau\right)\cdot\left(\vec{g}\,\tau/2\right)-\left(\overrightarrow{AB}/\tau\right)\cdot\left(\vec{g}\,\tau/2\right)=0$. *Ultimii doi termeni se reduc și de aici rezultă egalitatea* $AB/\tau=\tau\cdot g/2$, *din care* $AB=(g/2)\cdot\tau^2=45\ \text{m}$.		
Oficiu		**1 punct**
Subiect II (A+B) O combinație: CINEMATICĂ + DINAMICĂ		**10 p**
II A. Avion utilitar		**6 puncte**
Viteza unghiulară a mișcării avionului este $\omega=v/R=2\pi/T$. De aici, pentru timpul unei rotații complete obținem $T=2\pi R/v=20\pi\approx62{,}83$ s	**0,50 p**	
Observăm că timpul $\tau=(10/3)\pi\approx10{,}47s$ este inferior lui $T/4\approx15{,}71s$, ceea ce înseamnă că între cele două momente (ale căderii sacilor) avionul a parcurs mai puțin de un sfert de circumferință	**0,75 p**	
Timpul în care ajunge la Pământ fiecare sac este dat de formula $H=(g/2)\cdot t^2$, astfel că $t=\sqrt{2H/g}=\sqrt{1500/5}=\sqrt{300}\approx17{,}32$s.	**0,75 p**	
În direcția înainte (adică în sensul vitezei tangențiale a avionului) sacul parcurge distanța $\ell=v\cdot t=v\sqrt{2H/g}\approx1732$m	**0,50 p**	
Realizarea unui ***desen adecvat*** **(vezi figura!)** .... 	**1 p**	
Fie **O** proiecția pe Pământ a centrului traiectoriei circulare a avionului. Distanța de la **O** la locul în care ajunge pe Pământ sacul căzut din avion este $R_1=\sqrt{R^2+\ell^2}\approx1999{,}96$m.	**0,75 p**	
Pe desen este indicat atât locul impactului cu solul al primului sac (**A**) cât și locul impactului cu solul al celui de-al doilea sac (**B**). Unghiul la centru al acestor poziții (notat cu α) coincide cu unghiul la centru al pozițiilor avionului în momentele separate prin intervalul de timp $\tau=(10/3)\pi$ secunde.	**0,50 p**	
Acum [ΔOAB fiind isoscel OA = OB = R_1, mas($\widehat{AOB}$) = α] putem scrie: $S/2=R_1\sin(\alpha/2)$, unde S = AB, $\alpha=\omega\tau=(v/R)\tau$	**0,75 p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

În final $S = 2\sqrt{R^2 + (2H/g)\cdot v^2}\sin(v\tau/2R) \approx 2000\,\text{m}$. .... **0,50 p**

II B. Coborâre pe un plan înclinat — **3 puncte**

Legea a II - a Newton are forma $ma = mg\sin\alpha - F_{frecare}$. Aici $F_{frecare} = \mu N$ cu $N = G_n = mg\cos\alpha$. Astfel $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ și, de aici, $\mu = (g\sin\alpha - a)/(g\cos\alpha)$. .... **1 p**

Din relația $v = v_0 + at$ rezultă că: $a = (v - v_0)/t$. .... **0,25 p**

Nu este greu de înțeles că μ are cea mai mare valoare acolo unde accelerația a este negativă, adică între momentele $t_1 = 2s$ și $t_2 = 3s$. În acest interval de timp $(\Delta t = 1\,\text{s})$ viteza scade de la $5\,\text{m/s}$ la $3\,\text{m/s}$, adică $\Delta v = -2\,\text{m/s}$. Corespunzător, $a = \Delta v/\Delta t = -2\,\text{m/s}^2$. .... **0,75 p**

Revenind în expresia coeficientului de frecare obținem

$\mu_{\max} = (g\sin\alpha + |a|)/g\cos\alpha = (\sin\alpha + |a|/g)/\cos\alpha$ .... **0,50 p**

Cu $\sin\alpha = 1/7$ și $\cos\alpha = \sqrt{1 - 1/49} = (4/7)\sqrt{3}$, deducem imediat că:

$\mu_{\max} = (1/7 + 1/5)\cdot(7/4\sqrt{3}) = (1/5)\sqrt{3} \approx 0{,}346$. .... **0,50 p**

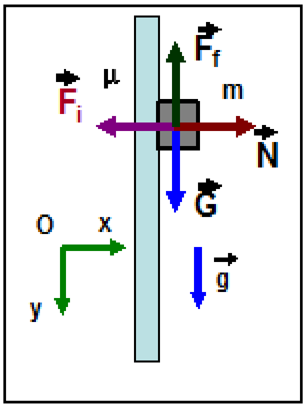
Oficiu — **1 punct**

Subiect III (A+B) MIȘCĂRI CU FRECARE — **10 p**

III A. Mișcare cu frecare pe un panou vertical — **4,5 p**

a.) Descompunem accelerația $\vec{a}$ pe două direcții reciproc perpendiculare (Ox - orizontală, paralelă cu direcția mișcării întregului sistem și Oy - verticală, perpendiculară pe direcția mișcării întregului sistem).

Putem scrie $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$. .... **0,25 p**



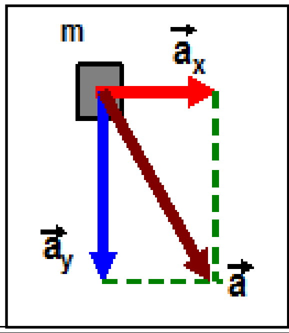
Conform principiului fundamental al dinamicii avem:

$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{F}_{inertie} = m\cdot\vec{a}$. (inclusiv desenul)........... **1 p**

Proiecțiile acestei relații vectoriale pe cele două direcții au forma :

$m\cdot g - \mu\cdot N = m\cdot a_y$, pe verticală, Oy .... **0,50 p**

$N = F_i = m\cdot a_x = m\cdot\frac{F}{m+M}$, pe orizontală, Ox .... **0,50 p**



Pentru întregul sistem, cu masa $(m+M)$, care se mișcă pe direcție orizontală, putem scrie $F = (m+M)\cdot a_x$ ..... **0,50 p**

Modulul accelerației totale este $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$,

unde: $a_y = g - \mu\cdot\frac{F}{m+M}$ și $a_x = \frac{F}{m+M}$. .... **0,25 p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Rezultă $a=\sqrt{g^2+\left(\frac{F}{m+M}\right)^2\left(1+\mu^2-2\mu g\frac{m+M}{F}\right)}$ . ... **b.)** Corpul **nu se va mişca pe panoul vertical** dacă : $F_f > G \Rightarrow \mu\cdot N > mg \Rightarrow \mu\cdot m\frac{F}{m+M} > mg \Leftrightarrow F > (m+M)\cdot g/\mu$.	**0,75 p** **0,75 p**	
III B. Mişcarea unui cubuleţ pe o scândură.		**4,5 p**
a.) Accelerația de frânare μg , dirijată spre stânga, încetinește mișcarea / /înaintarea cubulețului. .... Forța de apăsare normală mg dă naștere forței μmg, dirijată spre dreapta, ce ”tractează” scândura, imprimându-i (față de masa netedă pe care se află) accelerația μg . ... Față de scândură cubulețul se deplasează încetinit cu accelerația $2\mu g$ . ... Din formula lui Galilei $0-\mathrm{v}_0^{\,2}=-2(2\mu g)L$, rezultă $\mathrm{v}_0=2\sqrt{\mu g L}$ . ... **b.)** Timpul deplasării se determină din legea vitezei, $0=\mathrm{v}_0-(2\mu g)\cdot t_1$. Obținem: $t_1=\mathrm{v}_0/2\mu g=\sqrt{L/\mu g}$ . ... **c.)** Pentru o viteză inițială $\mathrm{v_i}=2\mathrm{v}_0$, avem relațiile $\mathrm{v_f}^2=4\mathrm{v}_0^{\,2}-4\mu g L=12\mu g L$, astfel că: $\mathrm{v_f}=2\sqrt{3\mu g L}$ (când cubulețul coboară de pe scândură,la celălalt capăt) . ... Pe de altă parte, $\mathrm{v_f}=2\mathrm{v}_0-(2\mu g)\cdot t_2$, și de aici $t_2=(2\cdot\mathrm{v}_0-\mathrm{v_f})/(2\mu g)=\ldots=(2-\sqrt{3})\sqrt{L/\mu g}$. Comparativ obținem $t_2/t_1=2-\sqrt{3}$, sau invers $t_1/t_2=2+\sqrt{3}\approx 3{,}73$	**0,75 p** **0,75 p** **0,50 p** **0,50 p** **0,75 p** **0,50 p** **0,75 p**	
Oficiu		**1 punct**

Barem propus de:

prof. univ. dr. **ULIU** Florea, Universitatea din Craiova;
prof. **TĂNASE** Dorina, Liceul “ KŐRÖSI CSOMA SÁNDOR ”, Covasna;
prof. **ANTONIE** Dumitru, Colegiul Tehnic nr.2**,** Târgu – Jiu.

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.