COLEGIUL
NAȚIONAL
“ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”
- 27 mai 2017 -

CLASA a X-a

1. Fie $a,b,c,d>0$. Determinați $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{a\cdot\sin x+b\cdot\cos x}{c\cdot\sin y+d\cdot\cos y}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție: Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz deducem că $\forall x\in\mathbb{R}$ are loc inegalitatea $(a\cdot\sin x+b\cdot\cos x)^2\le\left(a^2+b^2\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$, deci $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x\le\sqrt{a^2+b^2},\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, egalitatea având loc dacă și numai dacă $\operatorname{tg} x=\frac{a}{b}\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Atunci, pentru $x=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c\cdot\sin y+d\cdot\cos y}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$, adică $c\cdot\sin y+d\cdot\cos y\ge\sqrt{c^2+d^2}$. Ținând cont că inegalitatea are loc în sens invers, deducem că are loc egalitatea, adică $y=\operatorname{arctg}\frac{c}{d}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Evident, pentru $y=\operatorname{arctg}\frac{c}{d}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ se verifică ipoteza, fiind echivalentă cu $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x\le\sqrt{a^2+b^2},\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Barem:

Justifică inegalitatea $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x\le\sqrt{a^2+b^2},\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	3p
Obține $c\cdot\sin y+d\cdot\cos y=\sqrt{c^2+d^2}$	2p
Finalizare $y=\operatorname{arctg}\frac{c}{d}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	2p

2. Fie $n\ge3$ și $z_1,z_2,\dots,z_n\in\mathbb{C}^*$. Arătați că are loc inegalitatea $\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j=1,\ j\ne i}^{n}\left|z_j\right|}{\left|z_i\right|^2}\ge(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left|z_i\right|}$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Presupunând ordinea $0<\left|z_1\right|\le\left|z_2\right|\le\ldots\le\left|z_n\right|$ și notând cu $a_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left|z_j\right|$, $b_i=\frac{1}{\left|z_i\right|^2},i=\overline{1,n}$, observăm că au loc inegalitățile $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n$ și $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n$. Conform inegalității Cebîșev,

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum\limits_{j=1,\ j\neq i}|z_i|}{|z_i|^2}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|z_j|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|z_i|^2}\right)=\frac{n-1}{n}\left(\sum_{i-1}^{n}|z_i|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|z_i|^2}\right)=\frac{n-1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|z_i|}+S\right),$$

de unde $\left(1-\frac{n-1}{n}\right)S=\frac{1}{n}S\geq\frac{n-1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|z_i|}\right)$, adică inegalitatea din enunț.

Barem:

Arată că $a_1\geq a_2\geq...\geq a_n$ și $b_1\geq b_2\geq...\geq b_n$, unde $a_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lvert z_j\rvert$, $b_i=\frac{1}{\lvert z_i\rvert^2}, i=\overline{1,n}$	2p
Aplică inegalitatea Cebîșev	3p
Finalizare	2p

3. Într-un tablou de 72×72 numere întregi, fiecare linie și coloană conține cel mult 29 numere distincte. Arătați că numărul maxim de numere distincte ce pot fi înscrise în tablou este 2017.

Marius Marchitan, Suceava

Soluție: Dăm întâi un exemplu de tablou de 72×72 numere întregi respectând ipoteza și în care se află 2017 numere întregi distincte.

$d_{1,1}$	$d_{2,1}$	$d_{3,1}$	$\dots$	$d_{28,1}$	*	$\dots$	*	*	*
*	$d_{1,2}$	$d_{2,2}$	$d_{3,2}$	$\dots$	$d_{28,2}$	*	$\dots$	*	*
*	*	$d_{1,3}$	$d_{2,3}$	$d_{3,3}$	$\dots$	$d_{28,3}$	*	$\dots$	*
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
*	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	*
$a_{27,1}$	*	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$d_{28,45}$
$\dots$	$a_{27,2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_{3,1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$d_{3,70}$
$a_{2,1}$	$a_{3,2}$	$\dots$	$a_{27,26}$	*	$\dots$	$\dots$	*	$\dots$	$d_{2,71}$
$a_{1,1}$	$a_{2,2}$	$a_{3,3}$	$\dots$	$a_{27,27}$	*	$\dots$	*	*	$d_{1,72}$

Completarea tabloului a fost făcută pe diagonale. În partea situată deasupra diagonalei principale avem: $d_{1,1},\dots,d_{1,72}$ - 72 numere, $d_{2,1},\dots,d_{2,71}$ - 71 numere,…, $d_{28,1},\dots,d_{28,45}$ - 45 numere, unde am folosit $72+71+\dots+45=72\cdot 28-(1+2+\dots 27)$ numere. În partea inferioară, pornind din colțul stânga-jos, am folosit $1+2+\dots 27$ numere. Toate steluțele reprezintă un același număr. Astfel, în tablou sunt folosite $72\cdot 28+1=2017$ numere distincte și după cum se poate observa avem cel mult 29 numere pe fiecare linie și coloană.

Să arătăm că nu poate fi completat tabloul cu mai mult de 2017 numere distincte și să fie respectată condiția de a avea cel mult 29 numere distincte pe fiecare linie și coloană. Presupunem că avem cel puțin 2018 numere distincte în tablou. Cum $2018=72\cdot 28+2$, conform principiului lui Dirichlet există o linie, să zicem că prima, pe care se află cel puțin 29 numere distincte. Ținând cont de ipoteză, rezultă că pe prima linie se află exact 29 numere distincte. Rămân pentru celelalte 71 linii $71\cdot 28+1$ numere, deci există încă o linie, să zicem linia 2, cu exact 29 numere distincte, diferite de cele de pe prima linie. Atunci pe primele două linii ale fiecărei coloane se vor găsi exact două numere distincte. Deducem că pe liniile rămase ale fiecărei coloane vom avea cel mult 27 numere distincte. Se obțin astfel în tablou cel mult $72\cdot 27+2\cdot 29=2002$ numere, contradicție cu faptul că în tablou se află cel puțin 2018 numere.

În concluzie, numărul maxim de numere distincte ce pot fi înscrise în tablou este 2017.

Barem:

Exemplu de aranjare a 2017 numere ce respectă condiția	3p

Obține contradicție pentru cel puțin 2018 numere	3p
Finalizare	1p

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ cu $(x,n)=1$ are loc $x^6 \equiv 1 \pmod{n}$;

b) n divide 504.

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluție: Avem $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

a) $\Rightarrow$ **b)** Vom demonstra mai întâi că $(n,11)=1$. Dacă $(n,11)\neq 1$ atunci $n=11k$. Șirul $(11m+2)_{m\geq 1}$ este o progresie aritmetică de numere naturale cu rația 11. Deoarece primul termen al progresiei este prim cu rația, conform teoremei lui Dirichlet rezultă că șirul conține o infinitate de numere prime. Atunci există un număr prim p astfel încât $p=11m+2$ și $p>n$. Cum $(p,n)=1$ rezultă că $p^6 \equiv 1 \pmod{n}$, adică $n/(11m+2)^6-1$. Ținând cont că $n=11k$ și $(11m+2)^6 = M_{11}+2^6$ obținem 11 divide 63, absurd!

Cum $(n,11)=1$, conform ipotezei avem $11^6 \equiv 1 \pmod{n}$, adică $n/\left(11^6-1\right)$.

Dar $11^6-1=\left(11^3-1\right)\left(11^3+1\right)=(11-1)\left(11^2+11+1\right)(11+1)\left(11^2-11+1\right)=10\cdot 133\cdot 12\cdot 111$, deci

$$n/2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 19\cdot 37 \qquad (1)$$

Din (1) se observă că $(n,13)=1$, deci $13^6 \equiv 1 \pmod{n}$, adică $n/\left(13^6-1\right)$.

Dar $13^6-1=\left(13^3-1\right)\left(13^3+1\right)=(13-1)\left(13^2+13+1\right)(13+1)\left(13^2-13+1\right)=12\cdot 183\cdot 14\cdot 157$, de unde

$$n/2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 61\cdot 157 \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $n/2^3\cdot 3^2\cdot 7$, adică $n/504$.

b) $\Rightarrow$ **a)** Fie $x \in \mathbb{Z}$. Avem $x^6-1=\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right)$. Putem afirma că:

i. dacă $(x,2)=1$ atunci $x-1$ și $x+1$ sunt numere pare consecutive, deci $2^3/x^6-1$;

ii. dacă $(x,7)=1$, din teorema lui Fermat obținem $7/x^6-1$;

iii. dacă $(x,3)=1$ atunci $x=3k\pm 1$. Evident $3/x-1$ sau $3/x+1$, deci $3/x^2-1$. Avem și

$x^4+x^2+1=(3k\pm 1)^4+(3k\pm 1)^2+1=(M_3+1)+(M_3+1)+1=M_3$, adică $3/x^4+x^2+1$.

Rezultă că pentru $(x,3)=1$ avem $3^2/x^6-1$.

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n\geq 2$ și $n/504$, atunci $n=2^a\cdot 3^b\cdot 7^c$ cu $a\in\{0,1,2,3\}$, $b\in\{0,1,2\}$, $c\in\{0,1\}$ și *a, b, c* nu sunt toate nule. Ținând cont de cele trei afirmații de mai sus rezultă că pentru orice $x\in\mathbb{Z}$ cu $(x,n)=1$ are loc n/x^6-1, adică $x^6\equiv 1 \pmod{n}$.

Barem:

$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$	1p
Demonstrează implicația directă	3p
Demonstrează implicația reciprocă	3p

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.