COLEGIUL
NAȚIONAL
“ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”
- 27 mai 2017 -

CLASA a XI-a

1. *Pic* și *Poc* joacă un joc. *Pic* alege primul un număr $x \in [0,1]$, iar apoi alege *Poc* un număr $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pentru a forma numărul $A = xy + \cos y - \frac{\pi x}{6}$. *Pic* are ca obiectiv obținerea unui număr *A* cât mai mic, iar *Poc* a unui număr *A* cât mai mare. Ce numere vor alege cei doi pentru îndeplinirea obiectivelor, știind că, indiferent de alegerea lui *Pic,* alegerea lui *Poc* va fi optimă.

Marius Marchitan, Suceava

Soluție: Pentru o alegere oarecare a lui *Pic* a unui număr $x \in [0,1]$, alegerea lui *Poc* reprezintă punctul de maxim global $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ al funcției $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(y) = xy + \cos y - \frac{\pi x}{6}$. Derivata funcției *f* este $f'(y) = x - \sin y$, iar soluția ecuației $f'(y) = 0$ este $y = \arcsin x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Se observă că $f'(y) \geq 0, \forall y \in [0, \arcsin x]$ și $f'(y) \leq 0, \forall y \in \left[\arcsin x, \frac{\pi}{2}\right]$, deci $y = \arcsin x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este punct de maxim global pentru *f*. Prin urmare, alegerea corectă a lui *Poc* în cazul unei alegeri oarecare $x \in [0,1]$ a lui *Pic* este numărul $y = \arcsin x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Astfel, *Pic* va ști că, prin alegerea unui număr $x \in [0,1]$, se va obține în final numărul $A = x \arcsin x + \cos(\arcsin x) - \frac{\pi x}{6}$. Din acest motiv, alegerea sa reprezintă punctul de minim global al funcției $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - \frac{\pi x}{6}$. Derivata funcției *g* este $g'(x) = \arcsin x - \frac{\pi}{6}$, iar soluția ecuației $g'(x) = 0$ este $x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \in [0,1]$. Se observă că $g'(x) \leq 0, \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ și $g'(x) \geq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, deci $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$ este punct de minim global pentru *g*. Prin urmare, alegerea optimă a lui *Pic* este $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$, iar a lui *Poc* este $y = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Barem:

Determinarea lui $y = \arcsin x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ optim pentru $x \in [0,1]$ oarecare	3p

Determinarea lui $x=\frac{1}{2}\in[0,1]$	3p
Finalizare $y=\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	1p

2. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este funcție injectivă și continuă, demonstrați că există $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $0<f(\sin x_0)-f(\cos x_0)\le\frac{\pi^2}{16}$.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

Soluție: Considerăm funcția $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=f(\sin x)-f(\cos x)+x^2-\frac{\pi}{2}x$, care este continuă. Cum $g(0)\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[f(0)-f(1)\right]\cdot\left[f(1)-f(0)\right]<0$, deducem din teorema lui Bolzano că există $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ cu proprietatea că $g(x_0)=0$. Obținem imediat că $f(\sin x_0)-f(\cos x_0)=-x_0^2+\frac{\pi}{2}x_0$. Întrucât $0\le\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2<\frac{\pi^2}{16},\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, rezultă cerința.

Barem:

Consideră funcția $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=f(\sin x)-f(\cos x)+x^2-\frac{\pi}{2}x$	1p
Arată că $g(0)\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$	2p
Deduce că există $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ cu proprietatea că $g(x_0)=0$	2p
Finalizare	2p

3. Fie $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ o funcţie ce satisface condiţiile:

i) $f(0)=0$;

ii) $\min\left\{\sqrt{1-f^2(x)},\sqrt{1-f^2(y)}\right\}\le\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le\max\left\{\sqrt{1-f^2(x)},\sqrt{1-f^2(y)}\right\},\forall x>y$.

Demonstraţi că *f* este derivabilă în 0 și $f'(0)=1$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție: Înlocuind în relaţia ii) $y=0$, obţinem $\sqrt{1-f^2(x)}\le\frac{f(x)}{x}\le1,\forall x>0$. Prin înmulțire cu $x>0$ deducem că $x\sqrt{1-f^2(x)}\le f(x)\le x,\forall x>0$. Rezultă că $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=0$ și $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

Înlocuind în relaţia ii) $x=0$, obţinem $\sqrt{1-f^2(y)} \le \frac{f(y)}{y} \le 1, \forall y<0$. Găsim în mod analog că $y\sqrt{1-f^2(y)} \ge f(y) \ge y, \forall y<0$, de unde $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x}=1$.

Deducem că există $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}=1$, de unde rezultă că *f* este derivabilă în 0 și $f'(0)=1$.

Barem:

Obţine că $\sqrt{1-f^2(x)} \le \frac{f(x)}{x} \le 1, \forall x>0$	2p
Deduce că $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x}=1$	2p
Obține analog că $\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x}=1$	2p
Finalizare	1p

4. a) Fie $n \in \mathbb{N}$, $2 \le n \le 2015$ și $A \in M_n(\mathbb{Q})$. Dacă $A^{2017}=I_n$, demonstrați că $A=I_n$.

b) Rămâne valabil rezultatul de la punctul a) dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$?

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluție: a) Fie $f=X^{2017}-1$, $p_A=\det(A-xI_n)$ polinomul caracteristic al matricei *A* și m_A polinomul minimal al matricei *A* în $\mathbb{Q}[X]$. Evident $\mathrm{grad}(m_A) \le \mathrm{grad}(p_A)=n \le 2015$. Deoarece $f(A)=A^{2017}-I_n=O_n$, rezultă că m_A divide f.

Lemă: Fie *p* un număr prim. Polinomul $g=X^{p-1}+X^{p-2}+...+X+1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Demonstrația lemei: Cum $g(X)=\frac{X^p-1}{X-1}$ rezultă $g(X+1)=\frac{(X+1)^p-1}{X}$ de unde obținem

$$g(X+1)=X^{p-1}+C_p^1X^{p-2}+C_p^2X^{p-3}+...+C_p^{p-2}X+C_p^{p-1}, \text{ adică}$$

$$g(X+1)=X^{p-1}+C_p^1X^{p-2}+C_p^2X^{p-3}+...+C_p^{p-2}X+p.$$

Deoarece *p* este număr prim, p divide C_p^k oricare ar fi $1 \le k \le p-1$. Din criteriului lui Eisenstein, polinomul $g(X+1)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, deci polinomul *g* este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. □

Cum 2017 este număr prim, deducem că descompunerea în factori ireductibili a lui f este $f=(X-1)\left(X^{2016}+X^{2015}+...+X+1\right)$. Având în vedere că m_A divide f și că $\mathrm{grad}(m_A) \le 2015$ se obține că $m_A=X-1$. Dar $m_A(A)=O_n$, deci $A-I_n=O_n$, adică $A=I_n$.

b) Pentru $A \in M_n(\mathbb{R})$ rezultatul de la punctul a) nu rămâne valabil după cum reiese din următorul contraexemplu:

pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{2017} & \sin\frac{2\pi}{2017} & 0 & ... & 0 \\ -\sin\frac{2\pi}{2017} & \cos\frac{2\pi}{2017} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, avem $A^{2017}=I_n$ și $A \ne I_n$.

Notând $B=\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{2017} & \sin\frac{2\pi}{2017} \\ -\sin\frac{2\pi}{2017} & \cos\frac{2\pi}{2017} \end{pmatrix}$, atunci A se scrie pe “blocuri” astfel: $A=\begin{pmatrix} B & O_{2,n-2} \\ O_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$.

Cum $B^k=\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{2017} & \sin\frac{2k\pi}{2017} \\ -\sin\frac{2k\pi}{2017} & \cos\frac{2k\pi}{2017} \end{pmatrix}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ rezultă $B^{2017}=I_2$ și $A^{2017}=\begin{pmatrix} B^{2017} & O_{2,n-2} \\ O_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}=I_n$.

Barem:

a) Obține că m_A / f, unde m_A polinomul minimal al matricei A și $f = X^{2017}-1$	1p
Arată că polinomul $X^{2016}+X^{2015}+...+X+1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$	1p
Obține că $m_A = X-1$	1p
Finalizare	1p
b) Contraexemplu	3p

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.