COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 27 mai 2017 -

CLASA a V-a

1. Aflați ultimele trei cifre ale numărului $A = 7^1 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2020}$.

Sascău Gabriela, Rădăuți, Suceava

Soluţie: În sumă sunt 2020 termeni, deci îi putem grupa câte 4.
Astfel obținem A = $7(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + \ldots + 7^{2017}(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = 400(7 + 7^5 + \ldots + 7^{2017})$.
Suma $7 + 7^5 + \ldots + 7^{2017}$ are 505 termeni iar ultima cifră a numerelor 7, 7^5, …., 7^{2017} este 7, deci $7 + 7^5 + \ldots + 7^{2017}$ este multiplu de 5. Avem A = 400 · 5k = 2000k, deci ultimele 3 cifre ale numărului A sunt zerouri.

Barem:

Grupează termenii sumei și obține $A = 400\left(7 + 7^5 + \ldots + 7^{2017}\right)$	3p
Deduce că $7 + 7^5 + \ldots + 7^{2017}$ este multiplu de 5	3p
Finalizare ultimele 3 cifre ale numărului A sunt zerouri	1p

2. a) Arătați că numărul 10^{2017} se poate scrie ca sumă dintre un pătrat perfect și un cub perfect.
b) Demonstrați că ecuația $a^{2017} = b^2 + c^3$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale.

Vasile Solcanu, Bogdănești, Suceava

Soluţie:

a) $10^{2017} = 10^{2016} \cdot 10 = 10^{2016} \cdot \left(3^2 + 1^3\right) = \left(10^{1008}\right)^2 \cdot 3^2 + \left(10^{672}\right)^3 \cdot 1^3 = \left(10^{1008} \cdot 3\right)^2 + \left(10^{672}\right)^3$

b) Plecăm de la relația dedusă la punctul anterior și obținem:

$$10^{2017} = \left(10^{1008} \cdot 3\right)^2 + \left(\left(10^{672}\right)\right)^3 \ / \cdot k^{2017 \cdot 6}$$

$$\left(10 \cdot k^6\right)^{2017} = \left(10^{1008} \cdot 3 \cdot k^{2017 \cdot 3}\right)^2 + \left(10^{672} \cdot k^{2017 \cdot 2}\right)^3, k \in \mathbb{N}$$

Tripletele $(a,b,c) \in \left\{\left(10 \cdot k^6, 10^{1008} \cdot 3 \cdot k^{2017 \cdot 3}, 10^{672} \cdot k^{2017 \cdot 2}\right) / \ k \in \mathbb{N}\right\}$, sunt soluții ale ecuației date.

Barem:

a) Demonstrează cerința	3p
b) Demonstrează cerința	4p

3. Determinați numerele naturale nenule x și y astfel încât $x^{y^x} = \left(x^y\right)^{2x-1}$.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

Soluţie: Evident perechea $(1, y)$ este soluție pentru orice $y \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $x \geq 2 \Rightarrow y^x = y(2x-1) \Rightarrow y^{x-1} = 2x-1$

Evident că perechea $(2,3)$ este soluție. Pentru $x \geq 3$, arătăm că ecuația $y^{x-1} = 2x-1$ nu mai are alte soluții. Avem y impar, $y \geq 3$ și notând $x-1 = p \geq 2$, ecuația devine $y^p = 2p+1$, pentru $p \geq 2$. Arătăm că $y^p \geq 3^p > 2p+1$.

Într-adevăr $2\left(1+3+3^2+...+3^{p-1}\right)=3^p-1$, fiecare termen (din cei p termeni ai parantezei) este ≥ 1, deci $3^p-1>2p \Rightarrow 3^p>2p+1$.

Barem:

$(1,y)$ este soluție pentru orice $y\in \mathbb{N}^*$	1p
Pentru $x\geq 2 \Rightarrow y^x=y(2x-1)\Rightarrow y^{x-1}=2x-1$	2p
Perechea $(2,3)$ este soluție	1p
Arată că pentru $x\geq 3$, ecuația $y^{x-1}=2x-1$ nu mai are alte soluții	3p

4. Demonstrați că există cel puțin o cifră în scrierea zecimală a numărului 2^{98} care se repetă de cel puțin 4 ori.

Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoșani

Soluţie: Arătăm, mai întâi, că numărul 2^{98} are în scrierea zecimală cel puțin 30 de cifre. Avem $2^{10}>10^3 \Leftrightarrow \left(2^{10}\right)^9>\left(10^3\right)^9 \Leftrightarrow 2^{90}>10^{27}$ și $256>100 \Leftrightarrow 2^8>10^2$. Înmulțind aceste două inegalități rezultă $2^{98}>10^{29}$.

Dacă numărul 2^{98} ar avea în scrierea zecimală cel puțin 31 de cifre, cum sunt doar 10 cifre în sistemul zecimal, conform principiului cutiei, există cel puțin o cifră care se repetă de cel puțin 4 ori.

Dacă numărul 2^{98} ar avea în scrierea zecimală 30 de cifre și dacă presupunem că nu ar exista nicio cifră care să se repete de cel puțin 4 ori, atunci cele 10 cifre se repetă fiecare de exact 3 ori. În acest caz suma cifrelor este $S=3(0+1+2+...+9)$ și deci numărul 2^{98} se divide cu 3, contradicție. Prin urmare, există cel puțin o cifră care se repetă de cel puțin 4 ori.

Obs. Se poate arăta că numărul 2^{98} are exact 30 de cifre.

Barem:

Arătă că numărul 2^{98} are în scrierea zecimală cel puțin 30 de cifre	3p
Aplică principiul cutiei și demonstrează cerința	4p

<u>**NOTĂ:**</u> Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.