COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 27 mai 2017 -
CLASA a VI-a

1. Un număr natural spunem că este ”*actual*” dacă are exact 2017 divizori.
a) Calculați suma divizorilor celui mai mic număr ”*actual*”.
b) Să se arate că orice număr ”*actual*” este și pătrat perfect și cub perfect.
c) Să se arate că printre oricare 4 numere ”*actuale*”, găsim 2 numere a căror diferență este divizibilă cu 5.

Vasile Solcanu, Bogdănești, Suceava

Soluție: a) Notăm cu a un număr ”*actual*” oarecare. Deoarece 2017 este număr prim, folosind formula numărului divizorilor unui număr natural rezultă că $a = p^{2016}$, unde *p* este un număr prim. Deci, cel mai mic număr ”*actual*” este 2^{2016}. Suma divizorilor este egală cu:
$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2016} = 2^{2017} - 1$
b) $a = p^{2016} = \left(p^{1008}\right)^2 = \left(p^{672}\right)^3$, deci *a* este și pătrat perfect și cub perfect.
c) $u(a) \in \{1,5,6\}$ deoarece $a = p^{2016} = \left(p^{504}\right)^4$ și *p* este număr prim; $u(a) \neq 0$. Conform principiului cutiei , printre 4 numere ”*actuale*” există 2 care au aceeași ultimă cifră. Diferența acestor 2 numere are ultima cifră 0, deci este divizibilă cu 5.

Barem:

a) Rezolvarea cerinței	3p
b) Rezolvarea cerinței	2p
c) Rezolvarea cerinței	2p

2. Să se determine numerele naturale *n* astfel ca $\dfrac{17^n}{n^3 - 3n^2 + n - 3}$ să fie număr întreg.

Mariana -Liliana Popescu, Suceava

Soluție: Fracția se scrie $\dfrac{17^n}{n^3 - 3n^2 + n - 3} = \dfrac{17^n}{(n-3)(n^2+1)}$. Se impune $n \neq 3$.

Cum $n \in \{0,1,2\}$ nu convin, se poate presupune $n \geq 4$, caz în care c.m.m.d.c. $\left(n-3, n^2+1\right) \in \{1,2,5\}$.

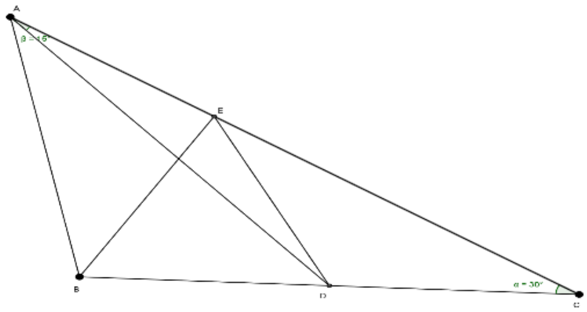
Deducem în mod necesar c.m.m.d.c.$\left(n-3,\ n^2+1\right) = 1$, caz în care vom avea $n-3=1$ și $n^2+1/17^n$, adică $n = 4$ (soluția unică a problemei).

Barem:

Descompune numitorul fracției	1p
Verifică pentru $n \in \{0,1,2\}$	2p
Deduce c.m.m.d.c.$\left(n-3,\ n^2+1\right) = 1$	2p
Finalizare determină *n*	2p

3. Fie ABC un triunghi oarecare în care $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$. Notăm cu D mijlocul laturii $[BC]$ Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului, știind că măsura unghiului CAD este egală cu 15°

Cristian Amorăriței, Suceava



Soluție:
Notăm cu E proiecția punctului B pe latura AC.
Triunghiul BEC este dreptunghic cu $m(\angle BEC) = 90^\circ$ și $m(\angle ACB) = 30^\circ$, de unde deducem

$BE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BE = BD = DC$. Deoarece $[ED]$ este mediană în triunghi dreptunghic, rezultă că

$ED = \frac{1}{2}BC$. Obținem că triunghiul BED este echilateral, deci

$m(\angle BED) = m(\angle EBD) = m(\angle EDB) = 60^\circ$.
Unghiul ADB este unghi exterior triunghiului ADC, rezultă
$m(\angle ADB) = m(\angle DAC) + m(\angle DCA) = 45^\circ$. Obținem $m(\angle EDA) = 15^\circ$, deci triunghiul EAD este isoscel, de unde $EA = ED$. Astfel, triunghiul EAB este dreptunghic isoscel, rezultă
$m(\angle EAB) = m(\angle EBA) = 45^\circ$. În final deducem $m(\angle BAC) = 45^\circ, m(\angle ABC) = 105^\circ$.

Barem:

Demonstrează $BE = BD = DC$	2p
$[ED]$ este mediană în triunghi dreptunghic, rezultă că $ED = \frac{1}{2}BC$	1p
BED este echilateral, deci $m(\angle BED) = m(\angle EBD) = m(\angle EDB) = 60^\circ$	1p
Obține $m(\angle EDA) = 15^\circ$ și demonstrează $EA = ED$	2p
Finalizare $m(\angle BAC) = 45^\circ, m(\angle ABC) = 105^\circ$	1p

4. Arătați că există o infinitate de numere naturale care încep cu cifra 1 și care, prin mutarea acestei cifre pe ultima poziție, formează un număr de 3 ori mai mare decât numărul inițial.

Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoșani

Soluție: Fie $N = \overline{1a_1a_2...a_n}$, $a_1, a_2, ..., a_n \in \{0,1,2,...,9\}$, $a_1 \neq 0, n \in \mathbb{N}$, un astfel de număr și $P = \overline{a_1a_2...a_n1}$, $a_1, a_2, ..., a_n \in \{0,1,2,...,9\}$, $a_1 \neq 0, n \in \mathbb{N}$ numărul format prin mutarea cifrei 1 de pe prima poziție, pe ultima. Avem relația $P = 3N \Leftrightarrow \overline{a_1a_2...a_n1} = 3 \cdot \overline{1a_1a_2...a_n}$. Notând $\overline{a_1a_2...a_n} = B$, relația anterioară devine $10 \cdot B + 1 = 3(10^n + B) \Leftrightarrow B = \frac{3 \cdot 10^n - 1}{7}$.

A arăta că există o infinitate de numere cu proprietatea menționată revine la a arăta că există o infinitate de valori naturale ale lui n astfel încât $\frac{3 \cdot 10^n - 1}{7} \in \mathbb{N}$.

Avem $3 \cdot 10^n - 1 = 3 \cdot (7+3)^n - 1 = M_7 + 3^{n+1} - 1$.

Pentru $n=6k-1, k\in\mathbb{N}^*$, obținem $3^{n+1}-1=3^{6k}-1=27^{2k}-1=(28-1)^{2k}-1=M_{28}$, deci în acest caz $\left(3^{n+1}-1\right)\vdots 7$. Numerele sunt de forma $N_n=\underbrace{142857142857...142857}_{\text{de } n \text{ ori blocul } 142857}, n\in\mathbb{N}^*$.

Barem:

Scrie relația $\overline{a_1a_2...a_n1}=3\cdot\overline{1a_1a_2...a_n}$	1p
Deduce $\overline{a_1a_2...a_n}=\dfrac{3\cdot 10^n-1}{7}$	2p
$3\cdot 10^n-1=3\cdot(7+3)^n-1=M_7+3^{n+1}-1$	2p
Pentru $n=6k-1, k\in\mathbb{N}^*$, demonstrează $\left(3^{n+1}-1\right)\vdots 7$ și finalizare	2p

<u>**NOTĂ:**</u> Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.