COLEGIUL
NAŢIONAL
"ŞTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”
- 27 mai 2017 -

CLASA a VII-a

1. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel ca $\sqrt{2(x+y)} = x^2 + y^2$ și $\frac{x^2+y^2}{4} + \frac{xy}{x+y} = 1$, atunci $x + y = 2$ și să se determine numerele x, y în acest caz.

Dan Nedeianu, Dr.Tr.Severin

Soluție: Avem $x + y > 0$. Dacă $x + y > 2$, rezultă că

$1 = \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{xy}{x+y} > \frac{x^2+y^2}{2(x+y)} + \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{2(x+y)} = \frac{x+y}{2} > 1$. La fel din $x + y < 2$ se obține o contradicție. Deci $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1.$

Barem:

Demonstrează că $x + y = 2$	4p
Determină numerele x, y	3p

2. Numerele reale a, b verifică relațiile $a + b = 2$ și $ab = -7$. Determinați numerele întregi n și k astfel încât $n\left(a^2 + 2b + k\right) - k = 2028$.

Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoșani

Soluție: $a + b = 2 \Rightarrow (a+b)(a-b) = 2(a-b) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 2a - 2b \Leftrightarrow a^2 + 2b = b^2 + 2a$.

Dar $a^2 + 2b + b^2 + 2a = (a+b)^2 - 2ab + 2(a+b) = 4 + 14 + 4 = 22 \Leftrightarrow a^2 + 2b = 11$

Relația din enunț devine $n(11+k) - k = 2028 \Leftrightarrow 11n + nk - k = 2028 \Leftrightarrow (n-1)(k+11) = 2017$

Se obțin soluțiile: $(n,k) \in \{(2,2006);(2018,-10);(0,-2028);(-2016,-12)\}$.

Barem:

Deduce $a^2 + 2b = b^2 + 2a = 11$	4p
Scrie relația sub forma $(n-1)(k+11) = 2017$	2p
Determină perechile (n,k) cu proprietățile cerute	1p

3. În triunghiul ABC, I este intersecția bisectoarelor interioare, $AI \cap BC = \{A'\}$, $BI \cap AC = \{B'\}$ și $CI \cap AB = \{C'\}$. Să se demonstreze că dacă $\frac{IA'}{AA'} \cdot \frac{IB'}{BB'} \cdot \frac{IC'}{CC'} = \frac{1}{27}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Cu notațiile uzuale $BC = a$, $AC = b$ și $AB = c$, se deduce, utilizând teorema bisectoarei, faptul că $\frac{IA'}{AA'} = \frac{a}{a+b+c}$ și analoagele, de unde rezultă $\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} = 1$. Folosind inegalitatea mediilor, deducem că produsul $\frac{IA'}{AA'} \cdot \frac{IB'}{BB'} \cdot \frac{IC'}{CC'}$ este maxim $\frac{1}{27}$ când $\frac{IA'}{AA'} = \frac{IB'}{BB'} = \frac{IC'}{CC'}$, adică pentru $a = b = c$.

Barem:

Deduce $\frac{IA'}{AA'} = \frac{a}{a+b+c}$ și analoagele	3p
$\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} = 1$	1p
Aplică inegalitatea mediilor și demonstrează că triunghiul este echilateral	3p

4. Fie ABC un triunghi oarecare și $D \in (AC), E \in (BC)$, astfel încât $[AD] \equiv [BE]$. Cercurile de centre O_1 și O_2, circumscrise triunghiurilor AEC, respectiv BDC se intersectează a doua oară într-un punct F. Notăm cu M și N punctele de intersecție ale dreptei O_1O_2 cu laturile (AC), respectiv (BC). Să se demonstreze că:

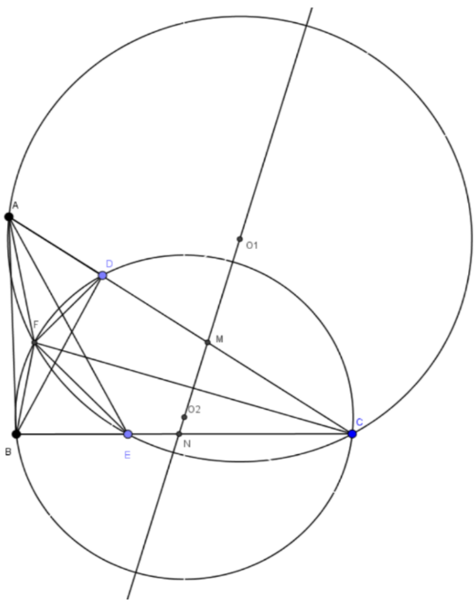
a) Dreapta O_1O_2 este mediatoarea segmentului $[FC]$.

b) Triunghiurile FAD și FEB sunt congruente.

c) Triunghiul CMN este isoscel.

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluție: a) Punctele F și C aparțin cercului de centru O_1, deci O_1 se află pe mediatoarea segmentului $[FC]$. Analog punctul O_2 se află pe mediatoarea segmentului $[FC]$, de unde rezultă concluzia,



b) Deoarece $FDCB$ patrulater inscriptibil, rezultă $\sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle FBC$ (1) și din $FACE$ patrulater inscriptibil rezultă $\sphericalangle CAF \equiv \sphericalangle FEB$ (2).

Din relațiile $(1),(2)$ și $[AD] \equiv [BE]$ rezultă congruența triunghiurilor FAD și FEB conform cazului de congruență ULU.

c) Din congruența triunghiurilor FAD și FEB rezultă $d(F, AD) = d(F, BE)$, adică $[CF$ este bisectoarea $\sphericalangle ACB$. Dar $CF \perp MN$, de unde deducem că triunghiul CMN este isoscel.

Barem:

a) Demonstrează cerința	2p
b) Deduce relațiile $\sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle FBC$ (1) $\sphericalangle CAF \equiv \sphericalangle FEB$ (2) Arată congruența triunghiurilor	2p 1p
c) $[CF$ este bisectoarea $\sphericalangle ACB$ Finalizare triunghiul este isoscel	1p 1p