COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 27 mai 2017 -

CLASA a VIII-a

1. Considerăm x, y, z trei numere reale nenule şi $k = xy + yz + zx$. Demonstraţi identitatea:

$$\frac{x^2+y^2+2k}{x+y}+\frac{y^2+z^2+2k}{y+z}+\frac{z^2+x^2+2k}{z+x}=4(x+y+z).$$

Soluţie: $\frac{x^2+y^2+2k}{x+y}=\frac{x^2+y^2+2xy+2yz+2zx}{x+y}=\frac{(x+y)^2+2z(x+y)}{x+y}=x+y+2z$.

Analog se obţin relaţiile $\frac{y^2+z^2+2k}{y+z}=2x+y+z$ şi $\frac{z^2+x^2+2k}{z+x}=x+2y+z$. Sumând termen cu termen cele trei relaţii se obţine concluzia.

Barem:

Demonstrează $\frac{x^2+y^2+2k}{x+y}=\frac{x^2+y^2+2xy+2yz+2zx}{x+y}=\frac{(x+y)^2+2z(x+y)}{x+y}=x+y+2z$ şi analoagele	6p
Finalizare	1p

2. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\left(x^{2017}+1\right)\left(x^{2017}+x^{2016}+\ldots+x+1\right)=4036\cdot x^{2017}$$

Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoşani

Soluţie: Dacă $x \le -1$, atunci $x^{2017}+1 \le 0$ şi $x^{2k+1}+x^{2k}=x^{2k}(x+1)\le 0$, deci membrul stâng al ecuaţiei este mai mare sau egal cu 0, contradicţie.

Dacă $x \in (-1,0)$, membrul stâng este, de asemenea pozitiv, iar membrul drept al ecuaţiei este negativ.

Observăm că $x = 0$ nu este soluţie a ecuaţiei.

Pentru $x \in (0,\infty)$, împărţim ecuaţia prin x^{2017} şi obţinem:

$\left(1+\frac{1}{x^{2017}}\right)\left(x^{2017}+x^{2016}+\ldots+x+1\right)=4036 \Leftrightarrow x^{2017}+x^{2016}+\ldots+x+1+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{2017}}=4036 \Leftrightarrow$ $\left(x^{2017}+\frac{1}{x^{2017}}\right)+\ldots+\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=4036$. Deoarece $a+\frac{1}{a}\ge 2, \forall a>0$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a=1$, de unde deducem că singura soluţie a ecuaţiei este $x=1$.

Barem:

Studiază existenţa soluţiilor pentru $x \le 0$	3p
Deduce $\left(x^{2017}+\frac{1}{x^{2017}}\right)+\ldots+\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=4036$	2p
$a+\frac{1}{a}\ge 2, \forall a>0$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a=1$	1p
Finalizare $x=1$	1p

3. Fie $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ astfel ca $2\left(a^2+b^2+c^2\right)\le ab+bc+ca+d$. Să se demonstreze că $ab+bc+ca\le d$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Din enunț se deduce $2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(ab+bc+ca)\le d-(ab+bc+ca)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca\le d-\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$, de unde $ab+bc+ca\le d$, egalitatea obținându-se pentru $a=b=c$ și $d=3a^2$.

Barem:

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(ab+bc+ca)\le d-(ab+bc+ca)$	2p
$2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(ab+bc+ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$	3p
Finalizare	2p

4. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$, $M\in(AB), P\in(A'D')$ astfel încât $AM+A'P=l$, unde l este lungimea muchiei cubului. Să se determine:

a) măsura unghiului format de dreptele $B'P$ și MC;
b) distanța dintre dreptele $B'P$ și MC;
c) distanța de la punctul P la dreapta MC, dacă $AM=A'P$.

Vasile Solcanu, Bogdănești, Suceava

Soluție: a) Fie $P'\in(AD)$ astfel încât $AP'=A'P$. Rezultă că $AP'PA', PP'A'A$ sunt paralelograme, deci $BP'\parallel B'P$. Cum $AP'+AM=l, AM+MB=l\Rightarrow AP'=MB$ și deducem că $\triangle MBC\equiv\triangle ABP'\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle ABP')+m(\angle CMB)=90^0\Rightarrow m(\angle MTB)=90^0$, unde am notat $\{T\}=BP'\cap MC$.

Deci $m(\angle(B'P,MC))=m(\angle(MC,BP'))=m(\angle MTB)=90^0$.

b) Considerăm $M'\in A'B'$ astfel încât $C'M'\parallel CM, C'M'\cap PB'=\{T'\}$ În mod evident $d(P,MC)=TT'=l$.

c) În acest caz $A'P=MB=\frac{l}{2}$. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle ABP'$ dreptunghic în A și obținem

$BP'=\frac{l\sqrt{5}}{2}$. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $d(P,MC)=PT$.

$$\triangle BTM\sim\triangle BAP'\Rightarrow\frac{MB}{BP'}=\frac{BT}{AB}\Rightarrow\frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{5}}{2}}=\frac{BT}{l}\Rightarrow BT=\frac{l\sqrt{5}}{5} \text{ și } P'T=P'B-BT=\frac{l\sqrt{5}}{2}-\frac{l\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}l.$$

Triunghiul $PP'T$ este dreptunghic în P' $\overset{Pitagora}{\Rightarrow}$ $PT^2=P'P^2+P'T^2=l^2+\left(\frac{3\sqrt{5}l}{10}\right)^2=l^2+\frac{45l^2}{100}=\frac{145l^2}{100}$

Deci, $d(P,MC)=PT=\frac{l\sqrt{145}}{10}$.

Barem:

a) Rezolvă cerința	3p
b) Rezolvă cerința	2p
c) Rezolvă cerința	2p