COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”

- 27 mai 2017 -

CLASA a IX-a

1. Pe tablă sunt scrise 14 numere: $2\sqrt{1};3\sqrt{2};4\sqrt{3};...;15\sqrt{14}$. Numim *operație*, înlocuirea a două numere *a* și *b* scrise pe tablă cu $\frac{5ab}{2a+3b}$ și $\frac{5ab}{3a+2b}$. Putem obține în urma mai multor *operații* numerele $\sqrt{3}+\sqrt{2};\sqrt{5}+\sqrt{4};\sqrt{7}+\sqrt{6};...;\sqrt{29}+\sqrt{28}$? Justificare.

Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoșani

Soluție: Avem $\frac{1}{\frac{5ab}{2a+3b}}+\frac{1}{\frac{5ab}{3a+2b}}=\frac{2a+3b}{5ab}+\frac{3a+2b}{5ab}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Prin urmare, în urma unei operații, suma inverselor numerelor scrise pe tablă este invariantă. Vom arăta că suma inverselor numerelor scrise inițial pe tablă este mai mică decât 2, adică $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...\frac{1}{15\sqrt{14}}<2.$

Pentru orice număr natural $k\in\{1,2,...,14\}$ este adevărată inegalitatea $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

Dând valori lui *k* de la 1 la 14 și sumând inegalitățile obținute, rezultă $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...\frac{1}{15\sqrt{14}}<2.$

Vom arăta că $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}.+..+\frac{1}{\sqrt{29}+\sqrt{28}}>2$, deci nu putem obține numerele indicate în urma unor *operații*. Fie $A=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{29}+\sqrt{28}}, B=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{30}+\sqrt{29}}$

Avem $A>B$ și $A+B=\sqrt{30}-\sqrt{2}>4\Rightarrow A>2$.

Barem:

Demonstrează suma inverselor numerelor scrise pe tablă este invariantă	2p
Arată $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...\frac{1}{15\sqrt{14}}<2.$	2p
Arată $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}.+..+\frac{1}{\sqrt{29}+\sqrt{28}}>2$ și finalizare	3p

2. Dacă $a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, să se determine numerele reale x,y astfel ca:

$$2x^2+1=\frac{2x\cos(xy)(1+\sin a+\cos a)}{\sqrt{(1+\sin a)(1+\cos a)}}.$$

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

Soluție: Prin ridicare la pătrat, obținem $\left(\frac{1+\sin a+\cos a}{\sqrt{(1+\sin a)(1+\cos a)}}\right)^2=\frac{2+2\sin a+2\cos a+2\sin a\cos a}{(1+\sin a)(1+\cos a)}=2$, de unde deducem că $\frac{1+\sin a+\cos a}{\sqrt{(1+\sin a)(1+\cos a)}}=\sqrt{2}.$

Ecuația devine $2x^2+1=2\sqrt{2}x\cos(xy)\Leftrightarrow$

$(\sqrt{2}x-\cos(xy))^2+\sin^2(xy)=0\Rightarrow\sqrt{2}x-\cos(xy)=0,\sin(xy)=0,\cos xy=\pm1\Rightarrow$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}},y=2\sqrt{2}k\pi$ sau $x=-\frac{1}{\sqrt{2}},y=\sqrt{2}(2k\pi+\pi),k\in\mathbb{Z}$.

Barem:

Deduce $\frac{1+\sin a+\cos a}{\sqrt{(1+\sin a)(1+\cos a)}}=\sqrt{2}.$	3p
Rezolvă ecuația	4p

3. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea:

$$xf(y)-yf(x)=f\left(\frac{y}{x}\right),\forall x,y\in\mathbb{R},x\neq0$$

***

Soluție: $x=y\Rightarrow f(1)=0$. Înlocuim $y=1\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Considerăm $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b}$ și obținem:

$\frac{1}{a}f\left(\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{b}f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{a}{b}\right)\Leftrightarrow\frac{-f(b)}{a}+\frac{f(a)}{b}=f\left(\frac{a}{b}\right)\Leftrightarrow\frac{-f(a)}{b}+\frac{f(b)}{a}=f\left(\frac{b}{a}\right),\forall a,b\in\mathbb{R}^*.$

Pentru $x=a,y=b$, obținem $af(b)-bf(a)=f\left(\frac{b}{a}\right)$. Din ultimele două relații deducem:

$f(b)\left(a-\frac{1}{a}\right)=f(a)\left(b-\frac{1}{b}\right),\forall a,b\in\mathbb{R}^*$. În final obținem $f(x)=c\left(x-\frac{1}{x}\right),\forall x\in\mathbb{R}^*$, c este o constantă reală. Aceste funcții verifică relația din enunț.

Barem:

$x=y\Rightarrow f(1)=0$. $y=1\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}^*$.	1p 1p
Obține $\frac{-f(a)}{b}+\frac{f(b)}{a}=f\left(\frac{b}{a}\right),\forall a,b\in\mathbb{R}^*$ și $af(b)-bf(a)=f\left(\frac{b}{a}\right)$	3p
Determină funcțiile și verifică	2p

4. Fie ABC un triunghi oarecare și picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor sale notate cu $A'\in(BC),B'\in(AC)$, respectiv $C'\in(AB)$. Dacă lungimile laturilor triunghiului sunt $BC=a,AC=b$ și $AB=c$, iar $X\in(B'C'),Y\in(A'C'),Z\in(A'B')$ și $\frac{XB'}{XC'}=\frac{c^2(b+a)}{b^2(c+a)},\frac{YC'}{YA'}=\frac{a^2(c+b)}{c^2(a+b)},\frac{ZA'}{ZB'}=\frac{b^2(a+c)}{a^2(b+c)}$, să se demonstreze că *AX, BY* și *CZ* sunt drepte concurente.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Fie $AX \cap (BB') = \{V\}$ și $AX \cap (BC) = \{A_1\}$. Din teorema bisectoarei se deduc lungimile segmentelor $AC' = \frac{bc}{a+b}, \mathrm{AB}' = \frac{bc}{a+c}$. Aplicând teorema lui Menelaus triunghiului $BB'C'$ cu transversala $A - X - V$, se deduce $\frac{AC'}{AB} \cdot \frac{VB}{VB'} \cdot \frac{XB'}{XC'} = 1$, iar tot cu aceeași teoremă aplicată triunghiului BCB' și transversalei aferente $A - V - A_1$, obținem $\frac{VB'}{VB} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AC}{AB'} = 1$. Folosind aceste relații obținem că $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{c}{b}$.

În mod analog se determină rapoartele determinate de *BY* și *CZ* pe segmentele $[AC]$, respectiv $[AB]$.

Concurența dreptelor *AX*, *BY* și *CZ* este asumată de reciproca teoremei lui G. Ceva aplicată în triunghiul *ABC.*

Barem:

Deduce lungimile segmentelor $AC' = \frac{bc}{a+b}, \mathrm{AB}' = \frac{bc}{a+c}$	1p
Aplică teorema lui Menelaus triunghiului $BB'C'$	1p
Aplică teorema lui Menelaus triunghiului BCB'	1p
Obține $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{c}{b}$	2p
Scrie rapoartele obținute în mod analog	1p
Aplică reciproca teoremei lui Ceva	1p