# CONCURSUL MATE && INFO

## Secțiunea MATEMATICĂ

## Ediţia I, 1 aprilie 2013

## CLASA a IV-a

**1.**

a) Efectuați: $754598 + 849730$.
b) Adunarea de mai jos este greșită,

$$\begin{array}{r} 754598+ \\ 849730 \\ \hline 1424328 \end{array}$$

dar poate fi corectată prin modificarea unei singure cifre $a$ în toate locurile în care apare, cu o altă cifră $b$. Care este cifra $a$ ce trebuie înlocuită și cifra $b$ ce trebuie pusă în locul acesteia?

*Claudia Marchitan, Suceava*

**Soluție:**

a) $754598 + 849730 = 1604328$.

b) Observăm că adunarea nu este efectuată corect pentru coloana zecilor de mii și cea a sutelor de mii, deci cifra ce trebuie modificată este una din cifrele 5, 4 sau 2, cifre ce apar pe coloana zecilor de mii. Dacă modificăm 5 sau 2, coloana sutelor de mii rămâne la fel, deci nu vom obține o adunare corectă. În concluzie, trebuie schimbată cifra 4, cifră ce apare și pe coloana sutelor de mii. Pentru a obține o adunare corectă pe coloana zecilor de mii, este necesar să-l înlocuim pe 4 cu 6, ceea ce va conduce la adunarea $756598 + 869730 = 1626328$, care este corectă. Astfel, am obținut $a = 4, b = 6$.

**Barem de notare:**
a) $754598 + 849730 = 1604328$ ........................................................................................ 9p

b) Deduce că trebuie schimbată cifra 4 ( $a=4$ ) ..........................................................................5p
Cifra ce trebuie pusă în loc este 6 ( $b=6$ ) ...................................................................................4p

**1.** Primele 2013 numere naturale nenule sunt scrise în ordine crescătoare pe o linie. Pe a doua linie sunt scrise aceleași numere naturale în ordine descrescătoare, încât se obțin coloane de câte două numere de forma:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 2013 |
| 2013 | 2012 | 2011 | 2010 | ... | 1 |

a) Care este cel de-al 100-lea număr de pe linia a doua?
b) Care este suma tuturor numerelor de pe a doua linie?
c) Există o coloană formată din două numere egale? Justificați răspunsul.

*Dan Popescu, Suceava*

**Soluție:**

a) Suma dintre orice număr de pe a doua linie și poziția lui în șir este constantă, mai exact egală cu 2014. Al 100-lea număr este 2014-100=1914.
b) $2013+2012+...+1=2013\cdot 2014:2=2027091.$
c) 2014 este număr par, de unde rezultă că pe coloana a 1007-a numerele vor fi egale.

**Barem de notare:**

a) Determină numărul ..................................................................................... 9p
b) Calculează suma ........................................................................................ 9p
c) Găsește coloana cu numere egale…………........................................................ 9p

Oficiu ................................................................................................................. 5p

# CONCURSUL MATE && INFO

## Secțiunea MATEMATICĂ

## Ediţia I, 1 aprilie 2013

## CLASA a V-a

**1.** Spunem că un număr $\overline{abc}$ este *prietenos* dacă cifrele sale sunt nenule și mai mici sau egale cu 5.

a) Este 555 *număr prietenos*?

b) Câte *numere prietenoase* și prime $\overline{ab}$ există?

c) Câte *numere prietenoase* $\overline{abc}$ există?

d) Câte dintre *numerele prietenoase* $\overline{abc}$ au proprietatea că $a^b + b \cdot c$ este număr impar?

*Claudia Marchitan, Suceava*

**Soluție:**

a) Evident, este.

b) Începând cu 11, există șapte astfel de numere.

c) Cum fiecare din cifrele $a, b, c$ poate lua câte 5 valori (1, 2, 3, 4 sau 5), sunt $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ de *numere prietenoase*.

d) Dacă $a \in \{2,4\}$, atunci $a^b$ este număr par, indiferent de cifra $b$. Cum $a^b + b \cdot c$ este număr impar, deducem că $b \cdot c$ este impar, adică cifrele $b$ și $c$ sunt impare. Astfel, pentru fiecare alegere a lui $a \in \{2,4\}$, cifrele $b$ și $c$ pot fi alese în $3 \cdot 3 = 9$ moduri astfel ca produsul $b \cdot c$ să fie impar, adică $b \in \{1,3,5\}$, $c \in \{1,3,5\}$, și găsim în total, în acest caz, $2 \cdot 9 = 18$ *numere prietenoase* cu proprietatea cerută. Dacă $a \in \{1,3,5\}$, atunci $a^b$ este număr impar, indiferent de cifra $b$. Cum $a^b + b \cdot c$ este număr impar, deducem că $b \cdot c$ este par. Ținând cont că alegerea cifrelor $b$ și $c$ se poate face în $5 \cdot 5 = 25$ moduri, iar în $9$ dintre ele produsul $b \cdot c$ este impar (conform cazului anterior), deducem că sunt 16 posibilități de alegere a cifrelor $b$ și $c$ astfel ca produsul să fie par. Obținem în acest caz $3 \cdot 16 = 48$ *numere prietenoase* cu proprietatea cerută. În final, găsim că există $18 + 48 = 66$ *numere prietenoase* $\overline{abc}$ au proprietatea că $a^b + b \cdot c$ este număr impar.

**Barem de notare:**

a) Se acordă ………………………………………………………………………… 9p

b) Se determină cele 7 numere ……………………………...……………………… 9p
c) Găsește că există 125 *numere prietenoase* …....................................................... 9p
d) Găsește că există 18 *numere prietenoase* în cazul $a \in \{2,4\}$ …............................ 4p
Găsește că există 48 *numere prietenoase* în cazul $a \in \{1,3,5\}$ …............................... 3p
Finalizare – există 66 *numere prietenoase* cu proprietatea cerută …......................... 2p

**1.** Pe o tablă sunt scrise șase numere consecutive. Ștergem unul dintre ele și constatăm că suma numerelor rămase este 2013. Ce număr a fost șters?

*Adrian Vieriu, Suceava*

**Soluție:** Notăm cu $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ cele șase numere scrise pe tablă și cu fie $a+k$ numărul șters, unde *k* poate lua una dintre valorile 0,1,…,5.

Adunăm numere rămase și obținem $5a + 15 - k = 2013$, de unde singura posibilitate este $k = 2, a = 400.$ Numărul șters este 402.

**Barem de notare:**
Scrie numerele de forma $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$…............................................ 3p
Obține $5a + 15 - k = 2013$…...................................................................................... 2p
Deduce $k = 2, a = 400$.…........................................................................................ 2p
Finalizare –găsește numărul șters ……………………………………………….......................... 2p
Oficiu …..................................................................................................................... 5p

# CONCURSUL MATE && INFO

## Secțiunea MATEMATICĂ

## Ediţia I, 1 aprilie 2013

## CLASA a VI-a

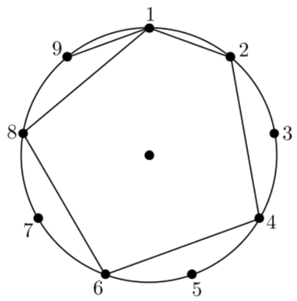
**1.** Pe un cerc se consideră 9 puncte, numerotate în sensul mișcării acelor de ceasornic, cu cifrele de la 1 la 9. Un greiere sare prin punctele numerotate, în sensul mișcării acelor de ceasornic, după următoarea regulă: dacă se află într-un punct numerotat cu cifră impară, sare în punctul imediat următor (spre exemplu, din $5 \rightarrow 6$ sau din $9 \rightarrow 1$); dacă se află într-un punct numerotat cu cifră pară, sare peste primul punct numerotat, în următorul (spre exemplu, din $4 \rightarrow 6$ sau din $8 \rightarrow 1$). Știind că inițial greierele se află în punctul numerotat cu cifra 9, să se determine:
a) În ce punct se va găsi greierele după 3 sărituri?

b) În ce punct se va găsi greierele după 2013 sărituri?

c) Aflați suma cifrelor înscrise în punctele prin care trece greierele (inclusiv cel inițial și final), după cele 2013 sărituri. (O cifră apare în sumă la fiecare trecere prin punctul corespunzător).

*Claudia Marchitan, Suceava*

**Soluție:** a) După 3 sărituri greierele se va afla în punctul marcat cu cifra 4 (trece prin: $9 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$).




b) Observăm că după 1, 6, 11 și în general $5k+1$ sărituri greierele se va afla în punctul marcat cu 1, după $5k+2$ sărituri greierele se va afla în punctul marcat cu 2, după $5k+3$ sărituri greierele se va afla în punctul marcat cu 4, după $5k+4$ sărituri greierele se va afla în punctul marcat cu 6 și după $5k+5$ sărituri greierele se va afla în punctul marcat cu 8 ( $k \geq 0$ ). Cum $2013$ este de forma $5k+3$, deducem că după $2013$ sărituri greierele se va afla în punctul marcat cu cifra 4.

c) În urma celor $2013$ sărituri greierele va trece prin următoarele puncte: $9 \to \underbrace{(1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8) \to \ldots \to (1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8)}_{402 \text{ grupe}} \to 1 \to 2 \to 4$. Suma cerută este

$S = 9 + (1+2+4+6+8) \cdot 402 + 1 + 2 + 4 = 8458$.

**Barem de notare:**

a) După 3 sărituri greierele se află în punctul marcat cu cifra 4........................................ 9p

b) După $2013$ sărituri greierele se va afla în punctul marcat cu cifra 4 ................................ 9p

c) Suma cerută este $S = 8458$ ....................................................................................... 9p

**2.** Dan și Dana sunt colegi de clasă. Dan spune: *„41,(6)% dintre colegii mei sunt băieți"*. Dana spune: „44*,(4)% dintre colegii mei sunt băieți"*. Știind că ambele afirmații sunt adevărate, să se afle numărul de băieți și numărul de fete din clasă.

a) Care este fracția ordinară corespunzătoare fracției zecimale 41,(6)?

b) Știind că ambele afirmații sunt adevărate, să se afle numărul de băieți și numărul de fete din clasă.

*Adrian Vieriu, Suceava*

**Soluție:**

a) Numărul este 41 + 6/9.

b) Dacă notăm cu *b* numărul de băieți și cu *f* numărul de fete din clasă, obținem egalitățile:

$$41,(6)\% \cdot (b + f - 1) = b - 1$$
$$44,(4)\% \cdot (b + f - 1) = b$$

Deducem că:

$$\frac{b-1}{b} = \frac{41,(6)}{44,(4)} \Leftrightarrow \frac{b-1}{b} = \frac{15}{16}.$$

În final obținem $b = 16,\ f = 21$.

**Barem de notare:**

a) Transformare corectă ............................................................................... 9p

b) Scrie relația $41,(6)\% \cdot (b + f - 1) = b - 1$ ................................................. 4p

Scrie relația $44,(4)\% \cdot (b + f - 1) = b$ ......................................................... 3p

Determină numărul de băieți și numărul fetelor din clasă ................................. 2p

Soluție alternativă ........................................................................................................ 9p

Oficiu.........................................................................................................................5p

**CONCURSUL MATE && INFO**

**Secțiunea MATEMATICĂ**

**Ediţia I, 1 aprilie 2013**

## CLASA a VII-a

**1.** O companie de telefonie mobilă practică prețuri diferențiate pentru taxarea la minut în cazul convorbirilor internaționale, în funcție de timpul total $t$ al convorbirilor dintr-o lună, exprimat printr-un număr întreg de minute: dacă $t \leq 60$ atunci se percepe un tarif de 15 cenți pe minut, dacă $61 \leq t \leq 100$ atunci tariful este de 14 cenți pe minut, iar dacă $t \geq 101$ atunci tariful este de 13 cenți pe minut. Pentru câte valori ale lui $t$ există posibilitatea efectuării unui timp $t' > t$ de convorbiri, care să conducă la o micșorare a valorii facturii (suma ce trebuie achitată pentru cele $t$ minute este mai mare decât cea pentru cele $t' > t$ minute).

*Marius Marchitan, Suceava*

**Soluție:**

Evident, dacă $t$ și $t' > t$ se încadrează la același plan tarifar, atunci factura pentru cele $t$ minute este mai mică decât pentru cele $t' > t$. Căutăm valorile pe care le poate lua $t \leq 60$ astfel încât $t \cdot 15 > 14 \cdot 61$ și valorile lui $61 \leq t \leq 100$ astfel încât $t \cdot 14 > 13 \cdot 101$. În primul caz se obține $56\frac{14}{15} = \frac{14 \cdot 61}{15} < t \leq 60$, adică $t \in \{57, 58, 59, 60\}$. În cazul doi obținem $93\frac{11}{14} = \frac{13 \cdot 101}{14} < t \leq 100$, de unde $t \in \{94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$. În concluzie, există 11 valori posibile ale lui $t$ pentru care putem plăti mai puțin vorbind mai mult.

**Barem de notare:**

Observă că $t$ și $t' > t$ sunt din planuri tarifare diferite ................................................ 3p
Pune condițiile $t \le 60$ și $t \cdot 15 > 14 \cdot 61$ ........................................................................ 2p
Găsește $t \in \{57, 58, 59, 60\}$ ........................................................................................ 3p
Pune condițiile $61 \le t \le 100$ și $t \cdot 14 > 13 \cdot 101$................................................................ 3p
Găsește $t \in \{94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$ ............................................................................ 2p
Obține că există 11 valori ale lui $t$ pentru care este îndeplinită cerință ....................... 2p

**2.** a) Să se determine numărul numerelor de patru cifre care au prima cifră egală cu ultima.
b) Să se determine numărul numerelor de patru cifre care au prima cifră egală cu ultima și sunt divizibile cu 15.

*Dan Popescu, Suceava*

**Soluție:**

a) Numerele sunt de forma $\overline{abca}, a \in \{1, 2, ..., 9\}, b, c \in \{0, 1, ..., 9\}$. Se obțin 9x10x10 numere.

b) Se obțin numerele $\overline{5bc5}$ divizibile cu 3.

**Barem de notare:**

a) Se obțin 900 de numere ……………………………………………………………….. 15p

b) Numerele se divid și cu 5 și cu 3 ………………………………………………….. 4p
a=5 ………………………………………………………………………………… 4p
Pentru $\overline{5bc5}$, $b+c+1$ se divide cu 3 ……………………………………………… 4p
Finalizare ………………………………………………………………………….. 3p

Oficiu ……………………………………………………………………………… 5p

# CONCURSUL MATE && INFO

## Secțiunea MATEMATICĂ

## Ediţia I, 1 aprilie 2013

### CLASA a VIII-a

**1.** Un elev citește în zilele de vineri și sâmbătă 36, respectiv 40 de pagini dintr-o carte. În acest fel, numărul mediu de pagini citite pe zi calculat pentru primele 6 zile ale săptămânii (luni-sâmbătă) este mai mare decât numărul mediu de pagini citite pe zi calculat pentru primele 4 zile ale săptămânii (luni-joi). Știind că numărul mediu de pagini citite pe zi calculat pe toată săptămâna (luni-duminică) a fost mai mare de 40, determinați numărul minim de pagini citite duminică.

*Marius Marchitan, Suceava*

**Soluție:** Notăm cu $a$ numărul total de pagini citite de luni până joi (inclusiv) și cu $b$ numărul de pagini citite duminică. Sunt satisfăcute inegalitățile: $\frac{a+36+40}{6}>\frac{a}{4}$ și $\frac{a+36+40+b}{7}>40$. Obținem $4a+304>6a$ și $a+b+76>280$. Deducem $a<152$ și $b>204-a$. Cum $a$ și $b$ sunt numere naturale, găsim $a\le 151$ și $b\ge 205-a$. Rezultă $b\ge 54$, cu egalitate când $a=151$. În concluzie, numărul minim de pagini citite duminică este 54.

**Barem de notare:**

Obține inegalitățile $\frac{a+36+40}{6}>\frac{a}{4}$ și $\frac{a+36+40+b}{7}>40$ ................................................ 4p

Deduce $a<152$ și $b>204-a$ ........................................................................................ 4p

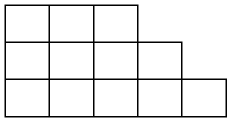
Găsește $a\le 151$ și $b\ge 205-a$ ..................................................................................... 3p

Obține că numărul minim de pagini citite duminică este 54 ................................................ 4p

2. Să se determine numerele întregi x, dacă x(x+28)=2013.

Rezolvarea ecuației de gradul a doilea și finalizare………….………………………… 15p
Alternativ, utilizarea divizibilității și finalizarea……………………………………… 15p

3.Dintr-un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3, 11 și 61 se confecționează cuburi cu latura egală cu 1. Ele se aranjează formând următoarea construcție pe verticală:



……………………………..

Pe ultimul rând de sus sunt 3 cuburi. Se cere să se determine ce înălțime are această construcție, știind că sunt utilizate toate cuburile.

**Soluție:** Volumul paralelipipedului fiind egal cu 2013, se pot construi 2013 cuburi cu latura 1. Dacă presupunem că la baza construcției sunt $n$ cuburi, avem $3+4+\ldots+n=2013$, de unde deducem $n=63$. Construcția va avea înălțimea 61.

**Barem de notare:**
Determină volumul paralelipipedului și deduce numărul de cuburi............................... 5p
$3+4+\ldots+n=2013$ și află n ........................................................................................ 5p
Determină înălțimea …………..................................................................................... 5p

Oficiu .................................................................................................................. 5p