Teză la matematică pe semestrul I – 14.12.2016
clasa a XII-a matematică-informatică – Nr.1

1. Fie $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & 15x\\ -x & 1-3x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

a) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+2xy), \forall x,y\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian, unde „·" este înmulțirea matricelor de ordin doi.

c) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}^*\to G, f(x)=A\left(\frac{x-1}{2}\right)$ este izomorfism de la $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ la $(\mathrm{G},\cdot)$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, & x<0\\ 2x+1, & x\ge 0\end{cases}$.

a) Să se arate că *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$ și determinați primitiva *F* cu proprietatea $F(1)=2$.

b) Calculați integralele $I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ și $I_2=\int_{-\ln 2}^{e-1}\frac{f(x)}{x+1}dx$.

c) Folosind eventual inegalitatea $e^x\ge x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, arătați că $\int_{-\ln 2}^{0} f(x)dx\le\frac{3}{8}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 50 minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Punctaj: 1a) și 2a) – 15p, 1b) și 2b) – 20p, 1c) și 2c) – 10p.

Teză la matematică pe semestrul I – 14.12.2016
clasa a XII-a matematică-informatică – Nr.2

1. Fie $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

a) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-2xy), \forall x,y\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian, unde „·" este înmulțirea matricelor de ordin trei.

c) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}^*\to G, f(x)=A\left(\frac{1-x}{2}\right)$ este izomorfism de la $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ la $(\mathrm{G},\cdot)$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1\\ \ln x+1, & x\ge 1\end{cases}$.

a) Să se arate că *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$ și determinați primitiva *F* cu proprietatea $F(0)=0$.

b) Calculați integralele $I_1=\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx$ și $I_2=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{f(x)}{x^2}dx$.

c) Folosind eventual inegalitatea $\ln x\le x-1, \forall x>0$, arătați că $\int_1^2 f(x)\cdot(x-1)dx\le\frac{5}{6}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 50 minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Punctaj: 1a) și 2a) – 15p, 1b) și 2b) – 20p, 1c) și 2c) – 10p.