Lucrare scrisă pe semestrul I
la disciplina Matematică
14 decembrie 2017
Clasa a XII-a, Matematică-Informatică – Nr.1

Subiectul I

1. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie $x \circ y = xy + 5x + 5y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

1p a) Verificaţi egalitatea $x \circ y = (x+5)(y+5) - 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

1p b) Să se arate că mulţimea $G = (-5, \infty)$ este parte stabilă a mulţimii numerelor reale în raport cu legea dată;

1p c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2017} = x$;

1p d) Admitem că $(G, \circ)$ este grup. Demonstraţi că funcţia $f : G \to (0, \infty), f(x) = x + 5$ este un izomorfism între grupurile $(G, \circ)$ şi $((0, \infty), \cdot)$.

Subiectul al II-lea

2. Considerăm şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{3x+4} dx$.

1p a) Calculaţi I_0, I_1;

1p b) Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului;

1p c) Determinaţi $\lim_{n \to \infty} I_n$;

1p d) Să se arate că $7(n+1) I_n - 21 J_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ unde am notat $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(3x+4)^2} dx$;

1p e) Arătaţi că $\lim_{n \to \infty} n I_n = \frac{1}{7}$.

Lucrare scrisă pe semestrul I
la disciplina Matematică
14 decembrie 2017
Clasa a XII-a, Matematică-Informatică – Nr.2

Subiectul I

1. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

1p a) Verificaţi egalitatea $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

1p b) Să se arate că mulţimea $G = (3, \infty)$ este parte stabilă a mulţimii numerelor reale în raport cu legea dată;

1p c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2017} = x$;

1p d) Admitem că $(G, \circ)$ este grup. Demonstraţi că funcţia $f : (0, \infty) \to G, f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ este un izomorfism între grupurile $((0, \infty), \cdot)$ şi $(G, \circ)$.

Subiectul al II-lea

2. Considerăm şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+3} dx$.

1p a) Calculaţi I_0, I_1;

1p b) Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului;

1p c) Determinaţi $\lim_{n \to \infty} I_n$;

1p d) Să se arate că $4(n+1) I_n = 1 + 8 J_n, \forall n \in \mathbb{N}$, unde am notat $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x^2+3)^2} dx$;

1p e) Arătaţi că $\lim_{n \to \infty} n I_n = \frac{1}{4}$.