

**Lucrare scrisă pe semestrul I  
la disciplina Matematică  
14 decembrie 2017  
Clasa a XII-a, Științe ale Naturii – Nr.1**

**Subiectul I**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$$

- 1p** a) Arătați că  $x \circ y = 3(x + 1)(y + 1) - 1$  pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .  
**1p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.  
**1p** c) Arătați că mulțimea  $H = (-1, \infty)$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea „ $\circ$ ”.  
**1p** d) Arătați că orice element al lui  $H$  este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.  
**1p** e) Rezolvați ecuația:  $x \circ x \circ x = 8, x \in \mathbb{R}$ .

**Subiectul al II-lea**

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \cdot e^x$ .

- 1p** a) Calculați  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x} dx$ .  
**1p** b) Determinați  $m \in \mathbb{R}$ , astfel încât funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = (x^2 + mx + 2)e^x$  să fie primitivă a funcției  $f$ .  
**1p** c) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) + f'(x)) dx = 2e - 2$ .  
**1p** d) Demonstrați că  $\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1}{3}$ , folosind eventual inegalitatea  $f(x) \geq x^2$ , adevărată pentru orice  $x \in [0, \infty)$ .

**Timp de lucru: 50 minute.**

**Lucrare scrisă pe semestrul I  
la disciplina Matematică  
14 decembrie 2017  
Clasa a XII-a, Științe ale Naturii – Nr.2**

**Subiectul I**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$$

- 1p** a) Arătați că  $x * y = 3(x - 1)(y - 1) + 1$  pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .  
**1p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.  
**1p** c) Arătați că mulțimea  $H = (1, \infty)$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea „ $*$ ”.  
**1p** d) Arătați că orice element al lui  $H$  este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.  
**1p** e) Rezolvați ecuația:  $x * x * x = 10, x \in \mathbb{R}$ .

**Subiectul al II-lea**

Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

- 1p** a) Calculați  $\int_1^{\sqrt{e}} f^2(x) dx$ .  
**1p** b) Arătați că pentru orice primitivă a funcției  $f$  este strict monotonă pe intervalul  $(1, \infty)$ .  
**1p** c) Arătați că  $\int_1^{e^2} f(x) dx = 4$ .  
**1p** d) Demonstrați că  $\int_1^4 f(x) dx \leq \frac{8}{3}$ , folosind eventual inegalitatea  $f(x) \leq \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ , adevărată pentru orice  $x \in [1, \infty)$ .

**Timp de lucru: 50 minute.**