COLEGIUL
NAȚIONAL
“ȘTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**
**- 27 mai 2017 -**

**CLASA a XI-a**

**1.** *Pic* și *Poc* joacă un joc. *Pic* alege primul un număr $x \in [0,1]$, iar apoi alege *Poc* un număr $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pentru a forma numărul $A = xy + \cos y - \frac{\pi x}{6}$. *Pic* are ca obiectiv obținerea unui număr *A* cât mai mic, iar *Poc* a unui număr *A* cât mai mare. Ce numere vor alege cei doi pentru îndeplinirea obiectivelor, știind că, indiferent de alegerea lui *Pic,* alegerea lui *Poc* va fi optimă.

*Marius Marchitan, Suceava*

**2.** Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcție injectivă și continuă, demonstrați că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < f(\sin x_0) - f(\cos x_0) \le \frac{\pi^2}{16}$.

*Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin*

**3.** Fie $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ o funcție ce satisface condiţiile:

i) $f(0) = 0$;

ii) $\min\left\{\sqrt{1-f^2(x)}, \sqrt{1-f^2(y)}\right\} \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \max\left\{\sqrt{1-f^2(x)}, \sqrt{1-f^2(y)}\right\}, \forall x > y$.

Demonstraţi că *f* este derivabilă în 0 și $f'(0) = 1$.

*Ion Bursuc, Suceava*

**4.** a) Fie $n \in \mathbb{N}$, $2 \le n \le 2015$ și $A \in M_n(\mathbb{Q})$. Dacă $A^{2017} = I_n$, demonstrați că $A = I_n$.

b) Rămâne valabil rezultatul de la punctul a) dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$?

*Mihai Piticari, Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc*