COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 27 mai 2017 -

CLASA a IX-a

1. Pe tablă sunt scrise 14 numere: $2\sqrt{1};3\sqrt{2};4\sqrt{3};...;15\sqrt{14}$. Numim *operație*, înlocuirea a două numere a și b scrise pe tablă cu $\frac{5ab}{2a+3b}$ și $\frac{5ab}{3a+2b}$. Putem obține în urma mai multor *operații* numerele $\sqrt{3}+\sqrt{2};\sqrt{5}+\sqrt{4};\sqrt{7}+\sqrt{6};...;\sqrt{29}+\sqrt{28}$? Justificare.

Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoșani

2. Dacă $a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, să se determine numerele reale x,y astfel ca:

$$2x^2+1=\frac{2x\cos(xy)(1+\sin a+\cos a)}{\sqrt{(1+\sin a)(1+\cos a)}}.$$

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

3. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea:

$$xf(y)-yf(x)=f\left(\frac{y}{x}\right),\forall x,y\in\mathbb{R},x\neq 0$$

***

4. Fie ABC un triunghi oarecare și picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor sale notate cu $A'\in(BC),B'\in(AC)$, respectiv $C'\in(AB)$. Dacă lungimile laturilor triunghiului sunt $BC=a, AC=b$ și $AB=c$, iar $X\in(B'C'),Y\in(A'C'),Z\in(A'B')$ și $\frac{XB'}{XC'}=\frac{c^2(b+a)}{b^2(c+a)},\frac{YC'}{YA'}=\frac{a^2(c+b)}{c^2(a+b)},\frac{ZA'}{ZB'}=\frac{b^2(a+c)}{a^2(b+c)}$, să se demonstreze că AX, BY și CZ sunt drepte concurente.

Dan Popescu, Suceava