CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a VI -a, 19 Mai 2018

CLASA a VI-a

1. Fie $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $\dfrac{a+2b+3c+4m+8n+12p}{a-m+2(b-n)+3(c-p)} = 6$**.**

Calculați valoarea raportului $\dfrac{a+2b+3c}{m+2n+3p}$ **.**

2. Pentru ce valori naturale ale lui n, numărul $m = 3 \cdot 6^{n-1} + \ 6^n + 2^{n+1} \cdot 3^n$ are exact șapte divizori formați dintr-o singură cifră?

3. Fie p_1 produsul primelor 100 numere impare și p_2 produsul primelor 101 numere prime. Aflați ultima cifră a numărului $7^{p_1 \cdot p_2}$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 90 minute.

Barem clasa a VI –a

1. Fie $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $\frac{a+2b+3c+4m+8n+12p}{a-m+2(b-n)+3(c-p)} = 6$.

Calculați valoarea raportului $\frac{a+2b+3c}{m+2n+3p}$.

Fie $a+2b+3c$ =x, $m+2n+3p$ =y	5p
Obținem: $a+2b+3c+4m+8n+12p$=x+4y	5p
$a-m+2(b-n)+3(c-p)$=x-y	5p
Egalitatea din enunț devine: x+4y=6$(x-y)$	5p
5x=10y, deci x=2y.	5p
Valoarea raportului este 2.	5p

2. Pentru ce valori naturale ale lui n, numărul $m = 3 \cdot 6^{n-1} + 6^n + 2^{n+1} \cdot 3^n$ are exact șapte divizori formați dintr-o singură cifră?

$m = 3^n \cdot 2^{n-1} \cdot 7$	5p
Pentru n=1, m=3 · 7 cu 3 divizori de o singură cifră: 1;3;7.	5p
Pentru n=2, $m = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ cu 6 divizori de o singură cifră: 1;2;3;6;7;9.	5p
Pentru n=3, $m = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ cu 7 divizori de o singură cifră: 1;2;3;4;6;7;9.	5p
Pentru n=4, $m = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$ cu 8 divizori de o singură cifră: 1;2;3;4;6;7;8;9.	5p
Pentru $n > 4$, divizorii de o singură cifră rămân neschimbați, adică 8. Rezultă, m are exact 7 divizori de o simgură cifră pentru n =3.	5p

3. Fie p_1 produsul primelor 100 numere impare și p_2 produsul primelor 101 numere prime. Aflați ultima cifră a numărului $7^{p_1 \cdot p_2}$.

p_1=1· 3 · 5 · ... · 199 - impar, $p_1 = 2a+1$, a - număr natural	5p
p_2=2· 3 · 5 · ... - par, $p_2 = 2b$, b - număr natural nenul	5p
$p_1 \cdot p_2 = (2a+1) \cdot 2b = 4ab + 2b$ este de forma 4k+2, unde k este număr natural nenul, deoarece este par și nu este divizibil cu 4. Rezultă, 7^{4k+2} are ultima cifră egală cu cea a nr. 7^2, adică 9.	10p 10p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Total: 100 puncte.