CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a VI -a, 19 Mai 2018

CLASA a IX-a

1. Fie $a \geq 3$ număr natural impar și $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir dat prin: $x_1 = a$ și $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Arătați că pentru orice $m,n \in \mathbb{N}^*, m \neq n$ termenii x_m și x_n sunt numere naturale prime între ele.

30p.

2. Fie $a,b \in (0,\infty), a > b$. Arătați că numerele a,b și $c = \sqrt{ab}$ pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic dacă și numai dacă $\frac{a}{b} \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

30p.

3. În triunghiul ABC se consideră punctele $M \in (AB), N \in (AC)$. Arătați că suma sinusurilor unghiurilor triunghiului AMN este mai mică decât suma sinusurilor unghiurilor patrulaterului $BCNM$.

30p.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 90 minute

Barem clasa a IX -a

1. Fie $a \geq 3$ număr natural impar și $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir dat prin: $x_1 = a$ și $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Arătați că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n$ termenii x_m și x_n sunt numere naturale prime între ele.

Soluţie: Prin inducție matematică se demonstrează că $x_n \in 2\mathbb{N}+1$ și $x_n \geq 3$ pentru orice $n \geq 1$. Într-adevăr, $x_1 = a \in 2\mathbb{N}+1, x_1 \geq 3$, iar $x_{n+1} = (x_n - 1)^2 + 1 \geq 2^2 + 1 = 5 \geq 3$ și $(x_{n+1} - x_n^2) \vdots 2$, deci x_{n+1} și x_n au aceeași paritate. Rezultă imediat afirmația.

Tot prin inducție arătăm că $x_n = 2 + (x_1 - 2)x_1x_2 \ldots x_{n-1}, \forall n \geq 2$. Evident $x_2 = 2 + (x_1 - 2)x_1$ și $x_{n+1} = 2 + (x_n - 2)x_n = 2 + (x_1 - 2)x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n$, de unde rezultă afirmația.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n$ și $d = (x_m, x_n)$. Dacă $m < n$, atunci $x_n = 2 + (x_1 - 2)x_1 \ldots x_m \ldots x_{n-1}$ și cum $d / x_m, d / x_n$ deducem că $d / 2$, adică $d \in \{1, 2\}$. Dar x_m și x_n sunt numere impare, de unde rezultă $d = 1$ și atunci termenii x_m și x_n sunt numere naturale prime între ele.

Barem:

Demonstrează că $x_n \in 2\mathbb{N}+1$ și $x_n \geq 3$ pentru orice $n \geq 1$	10p
Arată că $x_n = 2 + (x_1 - 2)x_1x_2 \ldots x_{n-1}, \forall n \geq 2$	10p
Arată că $(x_m, x_n) = 1$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n$	10p

2. Fie $a, b \in (0, \infty), a > b$. Arătați că numerele a, b și $c = \sqrt{ab}$ pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic dacă și numai dacă $\frac{a}{b} \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

GM 12/1968

Soluţie: Cum $a > b$ rezultă că $b < c = \sqrt{ab} < a$ și $\frac{a}{b} > 1$. Atunci a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic dacă și numai dacă $b + c > a$ și $b^2 + c^2 < a^2 (\Leftrightarrow \cos A < 0)$.

Pentru prima condiție avem: $b + c > a \Leftrightarrow \sqrt{ab} > a - b > 0 \Leftrightarrow a^2 - 3ab + b^2 < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\frac{a}{b} + 1 < 0$.

Deducem că $\frac{a}{b} \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cap (1, \infty) = \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Pentru a doua condiție găsim: $b^2 + c^2 < a^2 \Leftrightarrow b^2 + ab < a^2 \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 > 0.$

Obținem $\frac{a}{b} \in \left(\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty \right) \right) \cap (1,\infty) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty \right)$. Deducem că cele două condiții se realizează simultan dacă și numai dacă $\frac{a}{b} \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$.

Barem:

Concluzia echivalentă cu condițiile $b+c>a$ și $b^2+c^2<a^2$	10p
Prima condiție se realizează pentru $\frac{a}{b} \in \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$	10p
A doua condiție se realizează pentru $\frac{a}{b} \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ și finalizare	10p

3. În triunghiul ABC se consideră punctele $M \in (AB), N \in (AC)$. Arătați că suma sinusurilor unghiurilor triunghiului AMN este mai mică decât suma sinusurilor unghiurilor patrulaterului $BCNM$.

Soluție: Arătăm că $\sin A + \sin(AMN) + \sin(ANM) < \sin B + \sin C + \sin(BMN) + \sin(CNM)$.

Cum $\sin(AMN) = \sin(BMN)$ și $\sin(ANM) = \sin(CNM)$ fiind unghiuri suplementare, rămâne de arătat că $\sin A < \sin B + \sin C$. Ținând cont că $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (teorema sinusurilor), deducem că prin înmulțire cu $2R$ inegalitatea este echivalentă cu inegalitatea triunghiului $a < b+c$, care este evident adevărată.

Alternativ se poate arăta că

$$\sin B + \sin C - \sin A = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) = 2\cos\frac{A}{2}\cdot(-2)\sin\frac{B}{2}\sin\left(-\frac{C}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0,$$

deoarece $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Barem:

Observă că $\sin(AMN) = \sin(BMN)$ și $\sin(ANM) = \sin(CNM)$	10p
Concluzia echivalentă cu $\sin A < \sin B + \sin C$	10p
Arată inegalitatea $\sin A < \sin B + \sin C$	10p