CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a VI -a, 19 Mai 2018

CLASA a XI-a

1. a) Fie o matrice oarecare $X \in M_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că pentru orice număr natural $n \geq 2$, există $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ astfel încât $X^n = a_n X + b_n I_2$.

b) Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $AB - BA = A$. Demonstrați că $A^2 = O_2$ și $AB^n A = O_2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

30p.

2. Arătați că dacă $A \in M_2(\mathbb{R})$ și $\det(A) = 2$, atunci $\det\left(A^2 + A + I_2\right) \geq 1 - \frac{1}{8}(TrA)^2$.

30p.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă și concavă, cu proprietatea că

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(f(x) - ax - b\right) = 0$. Să se arate că $f(x) \leq ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$.

30p.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 90 minute

CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a VI -a, 19 Mai 2018

Barem clasa a XI -a

1. a) Demonstrează afirmația prin inducție ……………………………………………10p

b) $Tr(AB-BA)=0 \Rightarrow Tr(A)=0$ ………………………………………………………5p

Presupunem $\det(A)\neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă. Din $AB-BA=A$ rezultă $ABA^{-1}=B+I_2 \Rightarrow Tr\left(ABA^{-1}\right)=Tr(B+I_2)$ și cum $Tr(XY)=Tr(YX), \forall X,Y\in M_2(\mathbb{C})$, rezultă $Tr(B)=Tr(B+I_2)$, absurd. În concluzie, $\det(A)=0$ și deci $A^2=O_2$ ……………………10p

Folosind punctul a) și $ABA=O_2$, rezultă $AB^nA=O_2, \forall n\in\mathbb{N}^*$ ………………………………5p

2. $\det(A-xI_2)=x^2-(trA)x+\det A$ ………………………………………………………5p

$\det\left(A^2+A+I_2\right)=\det\left((A-\varepsilon I_2)(A-\bar{\varepsilon}I_2)\right)=\left(\varepsilon^2-(trA)\varepsilon+2\right)\left(\bar{\varepsilon}^2-(trA)\bar{\varepsilon}+2\right)$,………………10p

unde ε este o rădăcină complexă cubică nereală a unității. Prin calcul, inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\frac{9}{8}(trA)^2+3(trA)+2\geq 0 \Leftrightarrow \left(3tr(A)+4\right)^2\geq 0$, adevărat…………………..15p

3. Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-ax-b$, de două ori derivabilă și concavă, deci g' este descrescătoare pe $\mathbb{R}$, rezultă că există $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)\in\overline{\mathbb{R}}$. ……………………………..10p

Din teorema lui Lagrange există $c_n\in(n,n+1)$ astfel încât $g(n+1)-g(n)=g'(c_n)$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(n)=\lim\limits_{n\to\infty} g(n+1)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g'(c_n)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} g'(x)=0$ ………………10p

$g'(x)\geq \lim\limits_{x\to\infty} g'(x)=0 \Rightarrow g$ crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow g(x)\leq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)\leq ax+b, \forall x\in\mathbb{R}$ …..10p