CONCURSUL MATE && INFO

Secțiunea MATEMATICĂ

Ediţia a VI -a, 19 Mai 2018

CLASA a X-a

1. Fie $a \in \{z \in \mathbb{C}: z^3 + 1 = 0\}$.

Să se calculeze $1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{2018} = \sum_{k=0}^{1009} a^{2k}$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 4[x] + [2x]$, unde $[t] = Max\{k \in \mathbb{Z}: k \leq t\}$

a) Să se rezolve ecuația $f(x) = 3x$.

b) Calculând eventual $f°f$, să se demonstreze că $f$este funcție bijectivă și să se determine inversa f^{-1}.

3. Cu caracterele S,C,M se formează cuvinte de lungime n. Câte cuvinte se pot forma cu alfabetul {S,C,M}? Câte dintre aceste cuvinte ale vocabularului au caracterul S cu un număr impar de apariții ?

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 90 minute.

Barem - Clasa a X-a

1. Utilizarea egalității $a^3 = -1$. **5 puncte**

Folosirea relației: $1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \begin{cases} \frac{t^{n+1}-1}{t-1}, t \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ n+1, t = 1 \end{cases}$. **10 puncte**

Reprezentarea$s = 1 + a^2 + (a^2)^2 + \cdots + (a^2)^{1009} =$

$= \frac{(a^2)^{1010}-1}{a^2-1} = \frac{a^{2020}-1}{a^2-1} = \frac{a^{3\cdot 673}\cdot a-1}{a^2-1}$. **10 puncte**

Finalizare. **5 puncte**

Notă: O altă soluție de tipul $S + a^{2020} = 0$ se va puncta corespunzător.

2. a) Obținem ecuația: $-4[x] + [2x] = 2x$, cu $2x = k \in \mathbb{Z}$ **5 puncte**

Reducerea la $\left[\frac{k}{2}\right] = 0$ cu finalizare. **10 puncte**

b) Justificarea faptului că$(f \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ **10 puncte**

sau justificarea bijectivității.

Finalizare $f^{-1}(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. **5 puncte**

3. Există 3^n cuvinte ale vocabularului. **5 puncte**

Alegerea a $2k + 1$ poziții din cele n se realizează în C_n^{2k+1} moduri,

$n \geq 2k + 1, k \in N$. **5 puncte**

Un cuvânt cu exact $2k + 1$ poziții ocupate de „S” poate fi construit în

$C_n^{2k+1} 2^{n-(2k+1)}$ moduri. **5 puncte**

Utilizarea relației $(1+x)^n - (1-x)^n = 2\sum_{k\geq 0} C_n^{2k+1} x^{2k+1}$. **10 puncte**

Finalizare cu numărul căutat $C_S = \frac{3^n + (-1)^{n+1}2^n}{2} = \frac{3^n}{2} + (-1)^{n+1}2^{n-1}$. **5 puncte**