COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”**
**- 26 mai 2018 -**

**CLASA a X-a**

**1.**Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| \geq 1, |z_2| \geq 1, |z_3| \geq 1$. Arătați că

$$2\left(|1+z_1|+|1+z_2|+|1+z_3|\right)+|1+z_1z_2|+|1+z_2z_3|+|1+z_3z_1| \geq 6.$$

*Sorin Rădulescu, București și Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc*

**2.**Determinați funcțiile $f, g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ cu proprietățile: $f(x)g(x) = \frac{1}{2\cos x}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și
$\cos^2 x \cdot \left(f^2(x)+g^2(x)\right) = f^2(x) - \cos x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

*Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin*

**3.**Fie $a, b \in (0,1) \cup (1, \infty)$. Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f\left(a^x\right) + \frac{1}{f\left(a^{-x}\right)} = 2b^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Dan Popescu, Suceava*

**4.**Punctele de abscise numerele naturale de la 1 la 4000 de pe axa reală sunt colorate cu $n$ culori, $1 \leq n \leq 4000$. Pentru fiecare culoare $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, notăm cu $m_k$ abscisa mijlocului segmentului de lungime maximă având capetele colorate cu culoarea $k$ (dacă pentru o culoare $k$ avem un singur punct $A$ colorat cu culoarea respectivă, atunci mijlocul segmentului $[AA]$ este punctul $A$, iar $m_k$ este abscisa lui $A$). Notăm cu $S_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$. Determinați $n$ pentru care minimul lui $S_n$ este 2018.

*Marius Marchitan, Suceava*

**<u>NOTĂ:</u>** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.