COLEGIUL
NAŢIONAL
ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”
- 26 mai 2018 -

CLASA a XI-a

1.Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $i \in \mathbb{C}, i^2 = -1$. Pentru două matrice oarecare $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se consideră matricea $C = A \cdot {}^tA + B \cdot {}^tB + (A \cdot {}^tB + B \cdot {}^tA)\cos\alpha + i(B \cdot {}^tA - A \cdot {}^tB)\sin\alpha$, unde am notat cu ${}^tX$ transpusa matricei *X*. Să se arate că $\det(C) \in \mathbb{R}_+$.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

2.Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demonstrați că $A^2 = O_n$ dacă și numai dacă există $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = BC$ și $CB = O_n$.

Sorin Rădulescu,București și Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

3.Fie $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ și $f, g : [a,b] \to [a,b]$ două funcții continue cu proprietatea că $f \circ g = g \circ f$. Arătați că dacă una dintre cele două funcții este crescătoare, atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât $f(c) = c = g(c)$.

Dan Ștefan Marinescu,Hunedoara și Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc

4.Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ numere distincte. Notăm cu $A = \{x \in (0,1) / f(x) = \alpha\}$ și $B = \{x \in (0,1) / f(x) = \beta\}$. Arătați că dacă mulțimile *A*, *B* sunt infinite și $f'(x) \neq 0, \forall x \in A \cup B$, atunci există $c \in (0,1)$ astfel încât $|f'(c)| = |\alpha - \beta|$.

Marius Marchitan, Suceava

<u>NOTĂ:</u> Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.