COLEGIUL NAŢIONAL
ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”

- 26 mai 2018 -

CLASA a V-a

1.Un număr natural *a* este din *familia numărului natural b* dacă, adunând *a* cu orice număr obținut din*a* prin adăugarea în orice poziție a unei cifre zecimale, se obține *b*. De exemplu, 5 este din *familia numărului 20* deoarece $15+5=20$.
Să se determine familia numărului 918.

Dan Popescu,Suceava

Soluție: Datorită ordinului, în familia 918 intră numere de forma $\overline{ab}$. Atunci se analizează cazurile:

a) $\overline{ab}+\overline{cab}=918$,
b) $\overline{ab}+\overline{acb}=918$ și
c) $\overline{ab}+\overline{abc}=918$.

În primul caz, $c\in\{8,\ 9\}$.

a.1. Dacă $c=8$, atunci $2\overline{ab}=118$, de unde $\overline{ab}=59$.

a.2. Dacă $c=9$, atunci $2\overline{ab}=18$. Exclus, deoarece $a\neq 0$.

Analizând b) și c), se obține:

b.1. Pentru *a*=8 și *c*=3, atunci *b*=4; $\overline{ab}=84$

b.2. Pentru *a*=8 și *c*=2, atunci *b*=9; $\overline{ab}=89$

c. Pentru *a*=8, *b*=3 și *c*=5; $\overline{ab}=83$

Familia numărului 918 este $\{59,83,84,89\}$.

Barem:

Determină în familia 918 numerele de forma $\overline{ab}$	1p
Analizează cazurile: a) $\overline{ab}+\overline{cab}=918$; Dacă $c=8$, atunci $2\overline{ab}=118$, de unde $\overline{ab}=59$. b) $\overline{ab}+\overline{acb}=918$; Pentru *a*=8 și *c*=3, atunci *b*=4; $\overline{ab}=84$ Pentru *a*=8 și *c*=2, atunci *b*=9; $\overline{ab}=89$ c) $\overline{ab}+\overline{abc}=918$; Pentru *a*=8, *b*=3 și *c*=5; $\overline{ab}=83$	4p
Obține familia numărului 918 : $\{59,83,84,89\}$	2p

2. Restul împărțirii numărului natural *a* la numărul natural *b*este 5, iar restul împărțirii numărului 2*a* la *b*este 4.

a) Aflați împărțitorul;
b) Dacă diferența celor două câturi este 5, aflați deîmpărțitul.

Gabriela Elena Zanoschi, Iași

Soluție: a) $a=bc+5$, $5<b$; $2a=bd+4$, $4<b$

$2a=2bc+10$, de unde $2bc+10=bd+4$ și $b(d-2c)=6$

Deoarece $b>5$, obținem $b=6$.

b) $d = 2c+1$, rezultă $d>c$ și $d=c+5$

$2a=6(c+5)+4$, $2a=6c+34$ și $a=29$

Barem:

a)Scrie relațiile $a=bc+5$, $5<b$; $2a=bd+4$, $4<b$	2p
Obține împărțitorul	2p
b)Stabilește câtul mai mare	1p
Determină deîmpărțitul	2p

3. Pe o tablă sunt scrise numerele 2,3 și 5. Într-un pas mărim unul dintre numere cu 1 iar altul dintre ele cu 2, al treiea rămânând neschimbat.

a) După câți pași obținem trei numere cu suma 2017?
b) Putem obține după un anumit număr de pași numerele: 2016, 2017, 2018?

Vasile Solcanu, Bogdănești, Suceava

Soluție: a)După fiecare pas suma numerelor se mărește cu 3. Notăm cu x numărul de pași necesari pentru a obține suma 2017.

$2+3+5+3x=2017$

$10+3x=2017$

$3x=2007$

$x=669$

b) Suma inițială este: $10=M_3+1$

După fiecare pas, suma mărindu-se cu 3, rămâne de aceeași formă: M_3+1.

2016+2017+2018=M_3 ca sumă de trei numere consecutive.

Deci, nu putem obține numerele 2016, 2017, 2018.

Barem:

a) Determină că după fiecare pas suma numerelor se mărește cu 3	1p
Obține numărul de pași 669	3p
b)Deduce că după fiecare pas, suma mărindu-se cu 3, rămâne de aceeași formă: M_3+1.	2p
Finalizare: nu putem obține numerele 2016, 2017, 2018	1p

4. Un număr natural îl numim de tip *dependent de 19* dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 19.

a) Să se arate că 289 este *dependent de 19.*
b) Demonstrați că există o infinitate de numere de tip *dependent de 19* , care sunt pătrate perfecte.
c) Se pot construi o infinitate de perechi de numere naturale consecutive (n, $n+1$) astfel ca n și $n+1$ să fie simultan numere de tip *dependent de 19* ?

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

Soluție:

a) $2+8+9=19$, iar $19\vdots19$

b) Avem $17^2=289$, deci numerele $289\underbrace{00...0}_{2k\text{ cifre}}=\left(17\underbrace{00...0}_{k\text{ cifre}}\right)^2$ sunt de tip *dependent de 19*.

c) Condițiile problemei sunt satisfăcute pentru n și $n+1$, unde $n=19999\underbrace{00...0}_{k\text{ cifre}}\underbrace{999...9}_{17\text{ cifre}}$,iar $n+1=19999\underbrace{0...01}_{k\text{ cifre}}\underbrace{000...0}_{17\text{ cifre}}$ .Suma cifrelor lui n este 190 , iar suma cifrelor lui $n+1$ este 38.

Deci n și $n+1$ sunt numere consecutive de tip *dependent de 19*.

Barem:

a)Demonstrează cerința	2p
b) Demonstrează că există o infinitate de numere de tip *dependent de 19* , care sunt pătrate perfecte.	2p
c) Demonstrează că n și $n+1$ sunt numere consecutive de tip *dependent de 19*.	3p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.