CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a X -a, 26 Aprilie 2024

CLASA a VII-a

1. (**30p**) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că *a, b, c* sunt cifre diferite și $\sqrt{0,(\overline{ab})+0,(\overline{bc})+0,(\overline{ca})}=\frac{2}{3}$.

2. Fie numerele reale *x*, *y* și *z*, astfel încât $|x-\sqrt{5}|+|4\sqrt{2}-3y|+|z\sqrt{5}+1|\le 0$.

   a) (**20p**) Calculaţi $|x-y+z|$.

   b) (**10p**) Determinați partea întreagă a numărului $\frac{y}{z}$.

3. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $\measuredangle A=90°$, Q un punct pe latura AC astfel încât QC = 2·AQ, M un punct situat pe semidreapta opusă semidreptei QB, astfel încât BM = 3·MQ și punctul N mijlocul segmentului CQ.

   a) (**15p**) Demonstrați că triunghiul QMN este isoscel.

   b) (**15p**) Calculați raportul dintre aria triunghiului QMN și aria patrulaterului ABCM.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Se acordă 10 puncte din oficiu.
3. Timp de lucru: 90 minute.

CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a X-a, 26 Aprilie 2024

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. (**30p**) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că *a, b, c* sunt cifre diferite și $\sqrt{0,(\overline{ab})+0,(\overline{bc})+0,(\overline{ca})}=\frac{2}{3}$.

Soluție:

$\sqrt{0,(\overline{ab})+0,(\overline{bc})+0,(\overline{ca})}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{\overline{ab}}{99}+\frac{\overline{bc}}{99}+\frac{\overline{ca}}{99}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=44$

Relația devine: 11(a + b + c) = 44, adică a + b + c = 4.

Cum *a, b, c* sunt cifre diferite, avem $\overline{abc}\in\{103,130,301,310\}$.

Barem:

$\sqrt{0,(\overline{ab})+0,(\overline{bc})+0,(\overline{ca})}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{\overline{ab}}{99}+\frac{\overline{bc}}{99}+\frac{\overline{ca}}{99}=\frac{4}{9}$	10p
$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=44\Rightarrow a+b+c=4$	10p
Finalizare $\overline{abc}\in\{103,130,301,310\}$	10p

2. Fie numerele reale *x*, *y* și *z*, astfel încât $\left|x-\sqrt{5}\right|+\left|4\sqrt{2}-3y\right|+\left|z\sqrt{5}+1\right|\leq 0$.

a) (**20p**) Calculaţi $|x-y+z|$.

b) (**10p**) Determinați partea întreagă a numărului $\frac{y}{z}$.

Soluție:

a) Cum $\left|x-\sqrt{5}\right|+\left|4\sqrt{2}-3y\right|+\left|z\sqrt{5}+1\right|\leq 0$ și modulele sunt numere mai mari sau egale cu 0, obținem $\left|x-\sqrt{5}\right|=\left|4\sqrt{2}-3y\right|=\left|z\sqrt{5}+1\right|=0$, deci $x=\sqrt{5}, y=\frac{4\sqrt{2}}{3}, z=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$|x-y+z| = \left|\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right| = \frac{4}{15}\left|3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}\right|.$$

Cum $3\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$, obținem $|x-y+z| = \frac{4}{15}\left(5\sqrt{2} - 3\sqrt{5}\right)$.

b) $\frac{y}{z} = -\frac{4\sqrt{10}}{3} = -\sqrt{\frac{160}{9}}$. Cum $-5 < -\sqrt{\frac{160}{9}} < -4$, obținem $\left[\frac{y}{z}\right] = -5$.

Barem:

a) $\left|x-\sqrt{5}\right| = \left|4\sqrt{2} - 3y\right| = \left|z\sqrt{5} + 1\right| = 0$	5p
$x = \sqrt{5}, y = \frac{4\sqrt{2}}{3}, z = -\frac{\sqrt{5}}{5}$	5p
$|x-y+z| = \left|\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right| = \frac{4}{15}\left|3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}\right|$	5p
Cum $3\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$, obținem $|x-y+z| = \frac{4}{15}\left(5\sqrt{2} - 3\sqrt{5}\right)$	5p
b) $\frac{y}{z} = -\frac{4\sqrt{10}}{3} = -\sqrt{\frac{160}{9}}$	5p
Cum $-5 < -\sqrt{\frac{160}{9}} < -4$, obținem $\left[\frac{y}{z}\right] = -5$	5p

3. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $\measuredangle A = 90°$, Q un punct pe latura AC astfel încât QC = 2·AQ, M un punct situat pe semidreapta opusă semidreptei QB, astfel încât BM = 3·MQ și punctul N mijlocul segmentului CQ.

a) (**15p**) Demonstrați că triunghiul QMN este isoscel.

b) (**15p**) Calculați raportul dintre aria triunghiului QMN și aria patrulaterului ABCM.

<u>Soluție:</u>

a) Fie P mijlocul segmentului BQ. AP este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic BAQ, deci AP = BP = PQ = QM.
Din QC = 2·AQ, obținem AQ = QN = NC.
Din AQ = QN și PQ = QM, obținem că patrulaterul AMNP este paralelogram și AP = MN, deci MN = QM.

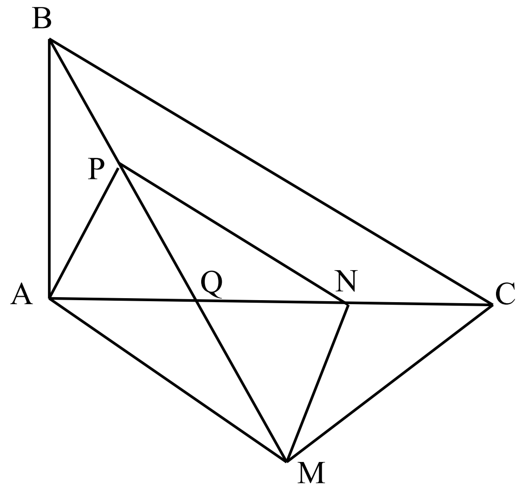
b) PN este linie mijlocie în triunghiul QBC, deci PN // BC și PN $= \frac{\mathrm{BC}}{2} \Rightarrow$ AM // BC și AM $= \frac{\mathrm{BC}}{2} \Rightarrow$ ABCM este trapez și $\mathrm{A_{ABCM}} = \frac{(\mathrm{BC} + \mathrm{AM})\cdot \mathrm{d(AM, BC)}}{2} = \frac{3}{4}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{d(AM, BC)}$.

Cum MN este mediană în triunghiul MCQ, avem $\mathrm{A_{QMN}} = \frac{1}{2}\mathrm{A_{MCQ}}$.

$\mathrm{MQ} = \frac{1}{3}\mathrm{MB} \Rightarrow \mathrm{A_{MCQ}} = \frac{1}{3}\mathrm{A_{MBC}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{BC\cdot d(AM,BC)}{2} = \frac{1}{6}\cdot BC\cdot d(AM,BC)$.

Deci $A_{QMN} = \frac{1}{12} \cdot BC \cdot d(AM, BC)$.

Raportul cerut este $\frac{1}{9}$.



Barem:

a) Fie P mijlocul segmentului BQ. AP este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic BAQ, deci AP = BP = PQ = QM.	5p
Din QC = 2·AQ, rezultă AQ = QN = NC	5p
AMNP este paralelogram și AP = MN, deci MN = QM.	5p
b) PN este linie mijlocie în triunghiul QBC, deci PN // BC și PN = $\frac{BC}{2} \Rightarrow$ AM // BC și AM = $\frac{BC}{2} \Rightarrow$ ABCM este trapez și $A_{ABCM} = \frac{(BC + AM) \cdot d(AM, BC)}{2} = \frac{3}{4} \cdot BC \cdot d(AM, BC)$.	5p
Cum MN este mediană în triunghiul MCQ, avem $A_{QMN} = \frac{1}{2} A_{MCQ}$. $MQ = \frac{1}{3} MB \Rightarrow A_{MCQ} = \frac{1}{3} A_{MBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC \cdot d(AM, BC)}{2} = \frac{1}{6} \cdot BC \cdot d(AM, BC)$ Deci $A_{QMN} = \frac{1}{12} \cdot BC \cdot d(AM, BC)$	5p
Finalizare: raportul cerut este $\frac{1}{9}$	5p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.