CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a X -a, 26 Aprilie 2024

CLASA a IX-a

1. Să se arate că mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R} / [x]\cdot\{x\}=x\}$ și $B=\left\{\frac{p^2}{p-1}, p\in\mathbb{Z}, p\leq 0\right\}$ sunt egale, unde $[x],\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului *x*.

30 p

2. Fie $a,x\in\mathbb{R}$ două numere reale cu proprietatea că $\sin x\leq a\cos x$. Să se arate că $\sin x-a^3\cos x\leq\frac{1}{3}\sqrt{1+a^6}$.

30 p

3. Fie ABC un triunghi echilateral de latură 1 și punctele $M\in(BC), N\in AC, P\in AB$, astfel încât vectorii $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CP}$ sunt coliniari. Demonstrați că valoarea expresiei $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BN^2}+\frac{1}{CP^2}$ este constantă.

30 p

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 90 minute.

CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a X-a, 26 Aprilie 2024

Barem clasa a IX-a

1. Avem: $\frac{p^2}{p-1} = p+1+\frac{1}{p-1}, p \le 0 \Rightarrow \left[\frac{p^2}{p-1}\right] = p, \left\{\frac{p^2}{p-1}\right\} = \frac{p}{p-1}$, de unde deducem că

$\left[\frac{p^2}{p-1}\right] \cdot \left\{\frac{p^2}{p-1}\right\} = \frac{p^2}{p-1} \Rightarrow B \subset A$ (1) 15p

Fie $x \in A \Rightarrow [x](x-[x]) = x \Rightarrow x = \frac{[x]^2}{[x]-1}$. Notăm $[x] = p, p \in \mathbb{Z}$.

Se demonstrează că $p \le 0$ și atunci rezultă $A \subset B$ (2).

Din relațiile (1) și (2) obținem $A = B$. 15p

2. Din inegalitatea CBS avem $\left(\sin 3x + a^3 \cos 3x\right)^2 \le \left(\sin^2 3x + \cos^2 3x\right)\left(1+a^6\right) = 1+a^6$ 10p

de unde rezultă $3\sin x - 4\sin^3 x + a^3\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) \le \sqrt{1+a^6}$ (1)..........................10p

Din ipoteză avem $\sin^3 x \le a^3 \cos^3 x$ și din (1) deducem $3\left(\sin x - a^3 \cos x\right) \le \sqrt{1+a^6}$ 10p

3. Din asemănarea triunghiurilor CAM și CNB, respectiv a triunghiurilor BAM și BPC

rezultă $\frac{AM^2}{BN^2} = \frac{CM^2}{CB^2}$ și $\frac{AM^2}{PC^2} = \frac{BM^2}{BC^2}$ 10p

Obținem $AM^2\left(\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BN^2}+\frac{1}{PC^2}\right) = \frac{2\left(BC^2 - MB \cdot MC\right)}{BC^2}$ 10p

Din relația lui Stewart avem $AM^2 = BC^2 - MB \cdot MC$, de unde rezultă că

$\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BN^2}+\frac{1}{PC^2} = \frac{2}{BC^2} = 2$, ceea ce trebuia demonstrat...10p