CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a X -a, 26 Aprilie 2024

CLASA a XI-a

1. Se consideră matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu $\det A = 1$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $\det\left(A^2 - A + I_3\right) = 0$;

ii) $\det\left(A + I_3\right) = 6$ și $\det\left(A - I_3\right) = 0$.

30 p

2. Fie $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care există $a,b \in (0,1)$ astfel încât $f(ax) + f(bx) = 2f(x), \forall x \in [-1,1]$. Să se arate că funcția f este constantă.

30 p

3. Se dau numerele reale $a,b \in \mathbb{R}, a < b$ și funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b), cu $f(a) = f(b) = 0$. Să se arate că există $c \in (a,b)$ astfel încât:

$$f(c) + f'(c) = f(c)f'(c)$$

30 p

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 90 minute.

CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a X-a, 26 Aprilie 2024

Barem clasa a XI-a

1. Fie $\lambda_i, i=\overline{1,3}$ valorile proprii ale matricei A și $P=\det\left(A-XI_3\right)\in\mathbb{R}[X]$ polinomul său caracteristic. Deoarece $\text{grad}(P)=3$ rezultă că are cel puțin o rădăcină reală. Fie $\lambda_1\in\mathbb{R}$.

i)$\Rightarrow$ii) $\det\left(A^2-A+I_3\right)=0\Rightarrow\det\left(A-\varepsilon I_3\right)\cdot\det\left(A-\bar{\varepsilon}I_3\right)=0\Rightarrow\left\{\lambda_1,\lambda_2\right\}=\left\{\varepsilon,\bar{\varepsilon}\right\}$, unde $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\varepsilon^3=-1$. Apoi $1=\det A=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\lambda_1|\varepsilon|^2=\lambda_1\Rightarrow P=-(X-1)\left(X^2-X+1\right)$. Avem $\det\left(A+I_3\right)=P(-1)=6,\det\left(A-I_3\right)=P(1)=0$.

....15p

ii)$\Rightarrow$i) $\det\left(A-I_3\right)=0\Rightarrow P(1)=0\Rightarrow P=(X-1)\left(-X^2+aX+b\right)$

$\lambda_2\lambda_3=1\Rightarrow b=-1$. Apoi

$6=\det\left(A+I_3\right)=P(-1)=-2(a-2)\Rightarrow a=1\Rightarrow P=(X-1)\left(-X^2+X-1\right)$, de unde rezultă concluzia

....15p

2. Considerăm funcția $g:[a,b]\to\mathbb{R},g(x)=f(x)-f(0)$, care este o funcție continuă pe intervalul $[a,b]$, care se anulează în origine și $g(ax)+g(bx)=2g(x),\forall x\in[-1,1]$.

Fie $M=\sup\left\{|g(x)|,x[-1,1]\right\}=|g(c)|,c\in[-1,1]$. Atunci

$M=\dfrac{|2g(c)|}{2}=\dfrac{|g(ac)+g(bc)|}{2}\le M\Rightarrow|g(ac)|=|g(bc)|=M$ 15p

Repetăm raționamentul pentru $M=g(ac)$ și obținem $M=g\left(a^2c\right)$. Inductiv se obține $M=\left|g\left(a^nc\right)\right|,\forall n\in\mathbb{N}^*$ și cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left|g\left(a^nc\right)\right|=g(0)=0$, rezultă $M=0$, deci $g=0$ și în concluzie funcția *f* este constantă..15p

3. Se aplică teorema lui Rolle funcției $g:[a,b]\to\mathbb{R},g(x)=f(x)\cdot e^{x-f(x)}$ 30p