CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a X -a, 26 Aprilie 2024

CLASA a X-a

1. Să se arate că, pentru orice număr complex $z \in \mathbb{C}$, au loc relațiile:

$$\operatorname{Re}(z) = \left|z + \frac{1}{2}\right|^2 - |z|^2 - \frac{1}{4} \text{ și } \operatorname{Im}(z) = \left|z + \frac{i}{2}\right|^2 - |z|^2 - \frac{1}{4}$$

30 p

2. Rezolvați ecuația: $\arccos\sqrt{\{\sin x\}} + \arccos\sqrt{\{2\sin x\}} = \frac{\pi}{2}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

30 p

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică de numere strict pozitive. Să se arate că are loc egalitatea: $a_1^{\left(C_n^0\right)^2} \cdot a_2^{\left(C_n^1\right)^2} \cdot a_3^{\left(C_n^2\right)^2} \cdot \ldots \cdot a_{n+1}^{\left(C_n^n\right)^2} = \sqrt{\left(a_1 \cdot a_{n+1}\right)^{C_{2n}^n}}$

30 p

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 90 minute.

CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a X-a, 26 Aprilie 2024

Barem clasa a X-a

1. Se rezolvă prin calcul direct.

Demonstrează $\operatorname{Re}(z)=\left|z+\frac{1}{2}\right|^2-|z|^2-\frac{1}{4}$ 15p

Demonstrează $\operatorname{Im}(z)=\left|z+\frac{i}{2}\right|^2-|z|^2-\frac{1}{4}$ 15p

2. Ecuația este echivalentă cu:

$$\cos\left(\arccos\sqrt{\{\sin x\}}+\arccos\sqrt{\{2\sin x\}}\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\{\sin x\}}\cdot\sqrt{\{2\sin x\}}-\sqrt{1-\{\sin x\}}\cdot\sqrt{1-\{2\sin x\}}=0 \Leftrightarrow$$

$\{\sin x\}\cdot\{2\sin x\}=\left(1-\{\sin x\}\right)\cdot\left(1-\{2\sin x\}\right) \Leftrightarrow \{\sin x\}+\{2\sin x\}=1$ 15p

Obținem $3\sin x\in\mathbb{Z}$ și studiind cazurile posibile deducem $\sin x=\frac{1}{2}$ sau $\sin x=\frac{1}{3}$, de unde rezultă că mulțimea soluțiilor este: $\left\{(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+k\pi\right\}\cup\left\{(-1)^k\arcsin\frac{2}{3}+k\pi\right\}$ 15p

3. Fie q rația progresiei. Avem:

$a_1^{\left(C_n^0\right)^2}\cdot a_2^{\left(C_n^1\right)^2}\cdot a_3^{\left(C_n^2\right)^2}\cdot\ldots\cdot a_{n+1}^{\left(C_n^n\right)^2}=\prod_{k=1}^{n+1}a_1^{\left(C_n^{k-1}\right)^2}\cdot q^{(k-1)\left(C_n^{k-1}\right)^2}=a_1^{\left(C_n^0\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2}\cdot q^{\left(C_n^0\right)^2+\ldots+n\left(C_n^n\right)^2}$ 15p

Demonstrează identitățile $\left(C_n^0\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$ și $\left(C_n^0\right)^2+\ldots+n\left(C_n^n\right)^2=\frac{n}{2}C_{2n}^n$ 10p

Finalizare calcul...5p