Infinity
Concurs de matematică

**Concursul județean de matematică „ Infinity ”**
**Ediția a II-a, 8 iunie 2024**
**Barem de corectare și notare clasa a V-a**

**Problema I**

a) Știind că $2^{12x+60} + 4^{6x+30} + 8^{4x+20} + 16^{3x+15} = 32^{x+7} \bullet 256^{90}$ determinați restul împărțirii numărului **INFINITY** $= 2^x + 3^x + 4^x + 7^x$ la 5.

b) Determinați numărul natural n, știind că $n^n = n! + 232$ unde $n! = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet \ldots \bullet n$.

(Petrescu Matei, IX)

**Soluție:**

a) Egalitatea $2^{12x+60} + 4^{6x+30} + 8^{4x+20} + 16^{3x+15} = 32^{x+7}\ \ 256^{90}$ poate fi scrisă succesiv sub următoarele forme echivalente: $2^{12x+60} + 4^{6x+30} + 8^{4x+20} + 16^{3x+15} = 2^{12x+60} + (2^2)^{6x+30} + (2^3)^{4x+20} + (2^4)^{3x+15} = 4 \times 2^{12x+60} = 2^{12x+62}$; pe de altă parte, $32^{x+7} \times 256^{90} = (2^5)^{x+7} \times (2^8)^{90} = 2^{5x+755}$.

**………………………………………………………………………………1 punct**

Deci, $12x + 62 = 5x + 755$, de unde rezultă că x=99, prin urmare x este de forma 4k+3.

**………………………………………………………………………………1 punct**

$U(2^x)=U(2^3)=8$; $U(3^x)=U(3^3)=7$; $U(4^x)=U(4^3)=4$; $U(7^x)=U(7^3)=3$.
Deci, U(**INFINITY**)=U(8+7+4+3)=2 ⇒ Restul împărțirii lui **INFINITY** la 5 este 2.

**………………………………………………………………………...…..1 punct**

b) Observăm că $n^n$ este multiplu de n, n! este multiplu de n, deci și 232 este multiplu de n.

Divizorii lui 232 sunt 1, 2, 4, 8, 29, 58, 116 și 232.

**……………………………………………………………………………2 puncte**

n=1 ⇔ 1=1+232 (fals)
n=2 ⇔ 4=2+232 (fals)
n=4 ⇔ 256=24+232 (adevărat)
Pentru n=8, $n^n$ este multiplu de $2^{24}$, n! este multiplu de $2^4$, iar 232 nu este divizibil cu $2^4$
Pentru n=29, $n^n$ este impar, n! este par, iar 232 este par

Pentru n=58 sau n=116 sau n=232, $n^n$ este multiplu de $2^{58}$, n! este multiplu de $2^4$, iar 232 nu este divizibil cu $2^4$

Deci singura soluție este n=4.

**…………………………………………………………………..……2 puncte**

**Problema II**

a) În câte moduri se pot așeza 6 cărți pe un raft? Dar într-un cerc?

b) Matei are pe o tablă numerele 2 7 3 5. În fiecare minut, acesta alege un număr de pe tablă pe care îl notează cu *x*. Apoi alege 3 numere de pe tablă (îl poate alege chiar și pe *x*) și adaugă la fiecare valoarea *x*. Este posibil, după mai multe minute, să fie scrise pe tablă numerele 2007, 2018, 2024 și 1998?

(Aparaschivei Tudor, X)

**Soluție:**

a) În câte moduri distincte se pot așeza 6 cărți pe un raft?

Observăm că o putem lua pas cu pas astfel: pe prima poziție putem pune 6 cărți distincte, pe a doua ne rămân 5 cărți din care putem alege, …, pe ultima poziție ne rămâne o singură carte din care putem alege. Deci răspunsul este 6•5•4•3•2•1=720 modalități distincte. **……………..…………………..1 puncte**

În câte moduri distincte se pot așeza 6 cărți pe un cerc?

Observăm că pentru un cerc, așezarea 1 2 3 4 5 6 este identică cu 2 3 4 5 6 1, 3 4 5 6 1, …, 6 1 2 3 4 5 . Deci putem utiliza formula anterioară, însă trebuie să ținem cont că pentru fiecare așezare există alte 5 așezări identice cu ea, deci trebuie le putem grupa câte 6, deci răspunsul va fi 720/6=120. **…………2 punct**

b) Fie a, b, c numerele alese după x. Tabla devine: a+x, b+x, c+x, d.

=> suma elementelor este a+b+c+d+3x.

Cum 3|3x => Restul împărțirii sumei numerelor de pe tablă la 3 este constant. **…………………………………………………..….2 puncte**

Inițial: 2+3+5+7= $M_3$+2.

(Absurd)

Final: $2007+2018+2024+1998=M_3+(M_3+2)+(M_3+2)+M_3=M_3+1$.

=> Este imposibil ca la final să fie pe tablă 2007, 2018, 2024, 1998.
…………………………………………………………………….….**2 puncte**

**Problema III**

a) Determinați resturile împărțirii unui pătrat perfect la 7.

b) Determinați numerele naturale a,b,c,d astfel încât:

$$\mathbf{a^2 + b^2 = 7(c^2 + d^2)}$$

(Aparaschivei Tudor, X)

**Soluție:**

a) $(M_7)^2=M_7$, $(M_7+1)^2=M_7+1$, $(M_7+2)^2=M_7+4$, $(M_7+3)^2=M_7+2$, $(M_7+4)^2=M_7+2$, $(M_7+5)^2=M_7+4$, $(M_7+6)^2=M_7+1$.

……………………………………………………………………..……**2 puncte**

b) Cum $a=M_7+r_1$, $b=M_7+r_2$ si $7|a^2+b^2$ (conform pct. a) => $r_1=r_2=0$.

……………………………………………………………………...…….**2 punct**

Atunci, $a=7a_1$ și $b=7b_1$ => $49(a_1^2+b_1^2)=7(c^2+d^2)$ ⇔ $c^2+d^2=7(a_1^2+b_1^2)$. Analog se obține $c=7c_1$ și $d=7d_2$. Aplicând același raționament vom obține din nou $a_1=7a_2$ si $b_1=7b_2$.

………………………………………………………………...……..**1 punct**

Ș.a.m.d. => Există $a_k$ pentru care $a_k$ nu este divizibil cu 7. Contradicție! Deci $7|a_k$ implică $a_k=0$ => $a=0$.

……………………………………………………………….....**1 punct**

Obs: Am presupus că a este primul număr care ajunge la nivelul k de mai sus.

=> $b^2=7(c^2+d^2)$. Analog pentru c și d. =>$c=0$ =>$b^2=7d^2$ => $7d^2$-p. perf => $d=0$ => $b=0$ => $a=b=c=d=0$ …………..………………………….....**1 punct**