Concursul județean de matematică „ Infinity ”
Ediția a II-a, 8 iunie 2024
Barem de corectare și notare clasa a VI-a

Problema I

a) Determinați numerele naturale x și y prime între ele astfel încât
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{20}$$
b) Demonstrați că
$$\frac{3}{1^2\bullet 2^2}+\frac{5}{2^2\bullet 3^2}+\frac{7}{3^2\bullet 4^2}+\dots+\frac{4049}{2024^2\bullet 2025^2}<1$$

(Aparaschivei Tudor, X)

Soluție:

a) Înmulțind cu xy obținem 20y-20x=xy. Deci cum xy și 20x sunt multiplii de x, înseamnă că și 20y este multiplu de x. Cum (x,y)=1 înseamnă că x/20. Analog 20x este multiplu de y deci y/20. Astfel, x și y sunt divizori ai lui 20 ……………………………………………………………(*1 punct*)

Pentru x=1, y=19/20 fals!
Pentru x=2, y=20/9 fals!
Pentru x=4, y=5
Pentru x=5, y=20/3 fals!
Pentru x=10, y=20, dar x și y sunt prime între ele, deci nu este soluție
Pentru x=20, y=0 fals!

Răspuns final: x=4 și y=5 ……………………………………..…(*1 punct*)

b) Observăm că $(x+1)^2-x^2=x^2+2x+1-x^2=2x+1$, pentru orice x număr natural. Astfel $3=2^2-1^2$, $5=3^2-2^2$, … $4049=2025^2-2024^2$ ………………(*2 puncte*)
Fiecare fracție se va transforma în felul următor
$\frac{3}{1^2\bullet 2^2}=\frac{2^2-1^2}{1^2\bullet 2^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}$ ……………………………………………(*1 punct*)

În final, toate fracțiile se vor reduce și vom rămâne cu $\frac{1}{1^2}$-$\frac{1}{2025^2}$ care este mai mic ca 1. **……………………………………………..(*2 puncte*)**

Problema II

a) O alee de lungime 100 m și lățime 1m este împărțită în 100 de pătrățele de arie $1m^2$. În câte moduri se poate colora aleea folosind culorile roșu, galben și albastru astfel încât să nu existe două pătrate vecine colorate la fel?

b) Într-o școală sunt 100 de elevi. Unii sunt prieteni între ei, alții nu. Totuși, dacă elevul A este prieten cu elevul B, atunci și elevul B este prieten cu elevul A (cu alte cuvinte, relația de prietenie este reciprocă).
Demonstrați că există doi elevi cu același număr de prieteni.

(Aparaschivei Tudor, X)

Soluție:

a) În primul pătrat putem pune orice culoare. În al doilea, nu avem voie să punem culoarea pusă în pătratul anterior, deci avem două culori disponibile. Astfel, pentru fiecare pătrat în afară de primul putem pune două culori (nu avem voie să o punem pe cea precedentă). **….(*2 puncte*)**
În final vom avea $3 \cdot 2^{99}$ moduri de a colora aleea. **……………(*1 punct*)**

b) Presupunem că nu există doi elevi cu același număr de prieteni. Astfel, fiecare va avea un alt număr de prieteni. **…………………..….(*1 punct*)**
Cum un elev poate avea de la 0 până la 99 de prieteni și fiecare dintre cei 100 de elevi are un număr diferit de prieteni **……………….(*1 punct*)**
Înseamnă că un elev are 0 prieteni, un elev are 1 prieten, … un elev are 99 de prieteni. **……………………………………………….(*1 punct*)**
Dar atunci avem un elev care nu are niciun prieten și un elev care este prieten cu toți ceilalți (cel cu 99), ceea ce este imposibil. Prin urmare există doi elevi cu același număr de prieteni **…………………(*1 punct*)**

Problema III

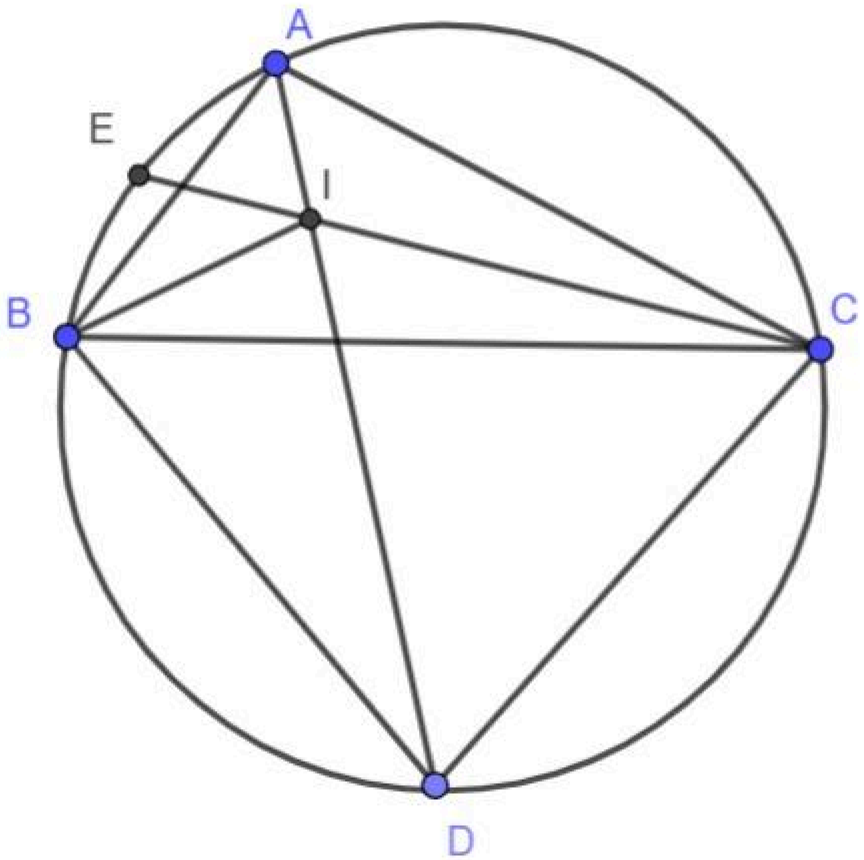
Fie triunghiul ABC ascuțitunghic și I centrul cercului înscris. Dreapta AI intersectează cercul circumscris triunghiului în D. Demonstrați:

a) BD=CD

b) BD=CD=ID

(Aparaschivei Tudor, X)

Soluție:



a) Cum AD este bisectoarea ∢BAC avem ∢BAD=∢CAD. De unde rezultă că arcul mic BD este egal cu arcul mic CD. **……………………………..(*1 punct*)**
Dar cum ∢BCD este asociat arcului BD și ∢CBD este asociat arcului CD obținem ∢BCD=∢CBD, deci triunghiul BCD este isoscel de baza BC, deci BD=CD **…………………………………………………………(*2 puncte*)**
b) Fie CE bisectoarea ∢ACB, deci I se află pe CE. Obținem că măsura arcului mic AE este ∢ACE •2. Măsura arcului CD este ∢DAC•2. Deci măsura ∢DIC este media aritmetică a arcelor AE și CD Deci ∢DIC=∢ACE+∢DAC **(*2 puncte*)**
∢ICD=∢ICB+∢BCD=∢ACE+∢BAD=∢ACE+∢DAC. **………………(*1 punct*)**
Obținem ∢ICD=∢DIC, deci triunghiul DIC este isoscel de bază IC, deci CD=ID=BD **……………………………………………………(*1 punct*)**