Concursul județean de matematică ,, Infinity ”
Ediția a II-a, 8 iunie 2024
Barem de corectare și notare clasa a VII-a

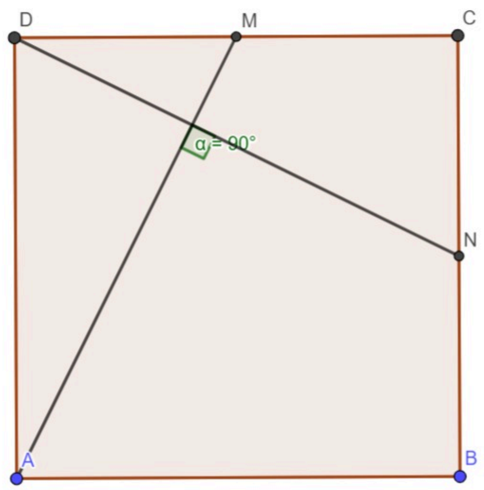
Problema I

a) Fie ABCD un pătrat. Fie M mijlocul lui CD și N mijlocul lui BC. Demonstrați că $AM \perp DN$.

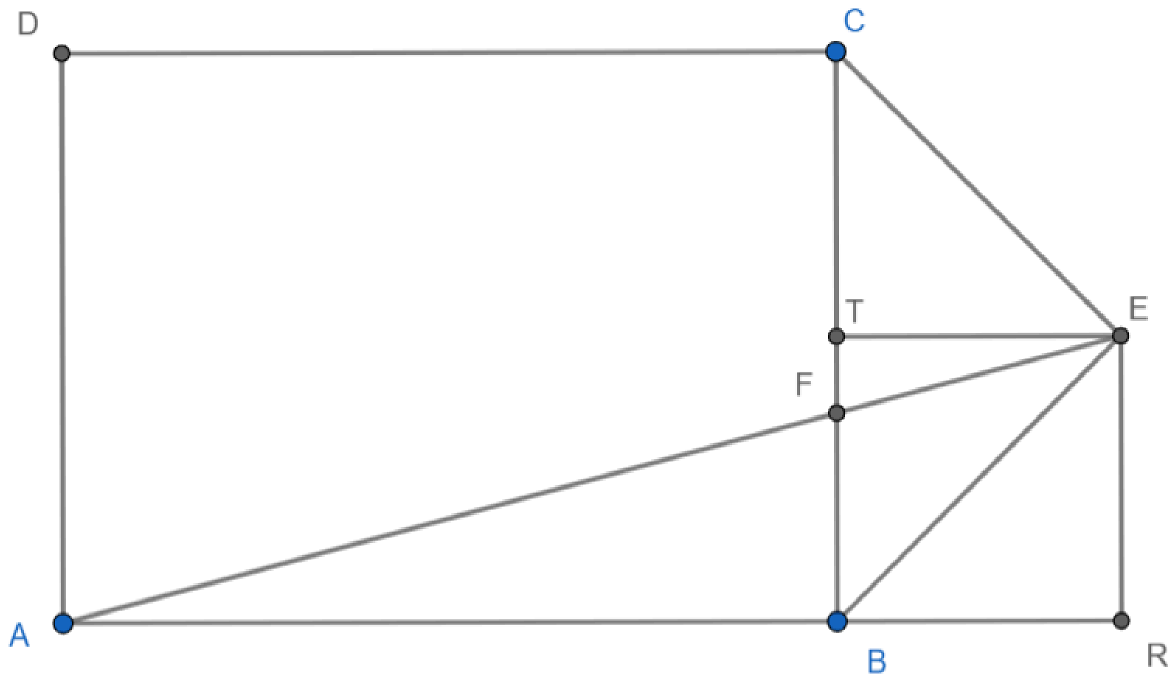
b) Fie ABCD un dreptunghi cu AB=8 cm și BC=6 cm. În exterior construim triunghiul dreptunghic isoscel BCE dreptunghic în E. Determinați distanța de la B la AE.

(Aparaschivei Tudor, X)

Soluție:



a) Triunghiul ADM este congruent cu triunghiul DCN (cazul catetă-catetă) , de unde rezultă $\sphericalangle AMD=\sphericalangle DNC$ şi $\sphericalangle DAM=\sphericalangle NDC$. Triunghiul CDN fiind dreptunghic, obținem că $\sphericalangle CND+\sphericalangle CDN=90^{\circ}$, însă $\sphericalangle CDN=\sphericalangle DAM$, deci $\sphericalangle CND+\sphericalangle CDN=90^{\circ}$. Fie $AM \cap DN=\{E\}$. În triunghiul DEM avem $\sphericalangle CDN+\sphericalangle CND+\sphericalangle DEM=180^{\circ}$, însă $\sphericalangle CDN+\sphericalangle CND=90^{\circ}$, deci $\sphericalangle DEM=90^{\circ}$, deci $AM \perp DN$. ***(3 puncte)*** b)



Cum triunghiul BCE este dreptunghic isoscel, obținem BE=CE=3√2. Notăm cu F intersecția dreptelor BC și AE. Fie ET înălțimea dusă din E pe BC.

ET este înălțime în triunghiul dreptunghic BEC, deci $ET = \frac{EC \bullet EB}{BC}$, ET=3

∢EFT=∢AFB (opuse la vârf) și ∢ABF=∢ETF, deci triunghiurile ABF și ETF sunt asemenea. Obținem că $\frac{AB}{ET} = \frac{BF}{FT}$ Deci $\frac{BF}{BT} = \frac{8}{11}$ de unde obținem BF=$\frac{24}{11}$. **…………………………………………..(*1 punct*)**

Din Pitagora în triunghiurile ABF și ETF obținem AF=$\frac{8}{11}\sqrt{130}$ și EF=$\frac{3}{11}\sqrt{130}$. **…………………………………………………..(*1 punct*)**

Fie ER perpendiculara din E pe AB. Avem BTER dreptunghi (3 unghiuri drepte), deci ER=BT=3. Aria triunghiului ABE este $\frac{ER \bullet AB}{2}$=12

Deci distanta de la B la AE (o notăm cu **d**) obține din faptul că aria triunghiului ABE este $\frac{d \bullet AE}{2}$. Obținem astfel d=$\frac{24}{\sqrt{130}} = \frac{12\sqrt{130}}{65}$ **…(*2 puncte*)**

Problema II

a) Arătați că **$5/a^2 + ab + b^2$** dacă și numai dacă **$5/a$** și **$5/b$**, unde a și b sunt numere întregi.

b) Determinați numerele reale x, y și z știind că respectă următoarele proprietăți:

1) **$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$**
2) Media aritmetică a celor trei numere este 2024

(Aparaschivei Tudor, X)

Soluție:

a) Considerăm $a=M_5$, avem urm cazuri

$b=M5 \Rightarrow (a+b)^2-ab=M_5$

$b=M_5+1 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-M_5$

$b=M_5+2 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-M_5$

$b=M_5+3 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-M_5$

$b=M_5+4 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-M_5$

b) Considerăm $a=M_5+1$, avem urm cazuri

$b=M_5 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-M_5$

$b=M_5+1 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-(M_5+1)$

$b=M_5+2 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-(M_5+2)$

$b=M_5+3 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-(M_5+3)$

$b=M_5+4 \Rightarrow (a+b)^2-ab=M_5-(M_5+4)$

c) Considerăm $a=M_5+2$, avem urm cazuri

$b=M_5 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-M_5$

$b=M_5+1 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-(M_5+2)$

$b=M_5+2 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-(M_5+4)$

$b=M_5+3 \Rightarrow (a+b)^2-ab=M_5-(M_5+1)$

$b=M_5+4 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-(M_5+3)$

d) Considerăm $a=M_5+3$, avem urm cazuri

$b=M_5 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-M_5$

$b=M_5+1 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-(M_5+3)$

$b=M_5+2 \Rightarrow (a+b)^2-ab=M_5-(M_5+1)$

$b=M_5+3 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-(M_5+4)$

$b=M_5+4 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-(M_5+2)$

e) Considerăm $a=M_5+4$, avem urm cazuri

$b=M_5 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-M_5$

$b=M_5+1 \Rightarrow (a+b)^2-ab=M_5-(M_5+4)$

$b=M_5+2 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+1)-(M_5+3)$

$b=M_5+3 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-(M_5+2)$

$b=M_5+4 \Rightarrow (a+b)^2-ab=(M_5+4)-(M_5+1)$

Cu alte cuvinte, $5|a^2+ab+b^2$ doar când $a=M_5$ și $b=M_5$. **(*4 puncte*)**

b) Înmulțind ecuația cu 2 și trecând totul în membrul stâng, obținem $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$. Grupând termenii, obținem $(x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2)=0$, care poate fi restrâns ca $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$. Cum $a^2 \geqslant 0$ oricare a real, rezultă că $x-y=0$, $x-z=0$ și $y-z=0$, deci $x=y=z$.

$\frac{x+y+z}{3} = 2024$, deci $x+y+z=6072$, dar $x=y=z$, așadar $x=y=z=\frac{6072}{3}=2024$

…………………………………………………………………..…3 puncte

Problema III

Determinați toate numerele naturale n, divizibile cu toate numerele naturale mai mici sau egale cu $\sqrt{n}$.

(Ieremciuc Ciprian, IX)

Soluție:

Fie Dn={1,2,3,…,m},m≤√n, K=[1,2,3,…,m].

Desigur toate numerele prime p≤√n sunt incluse, de asemenea și puterile lor până la p^k≤√n, dar p^(k+1)>√n . **……………………………(*1 punct*)**

Fie l numere prime care sunt mai mici sau egale cu √n.

K=p1^(k1) p2^(k2)⋯pl^(kl), unde ki este număr natural astfel încât:

p^(ki)≤√n<p^(ki+1),i=(1,l) .

Din cele l inegalități

√n<p1^(k1+1),

√n<p2^(k2+1),

……………,

√n<pl^(kl+1)

Obținem

(√n)^l<p1^(k1+1) p2^(k2+1)⋯pl^(kl+1). **……………..……………(*1 punct*)**

Însă p^(k1+1) p^(k2+1)⋯p^(kl+1)=p1^(k1) p2^(k2)⋯pl^(kl) ⋅ p1 p2⋯pl≤K^2,

deoarece K=p1^(k1) p2^(k2)⋯pl^(kl) și în consecință p1 p2⋯pl≤K.

Astfel,obținem: (√n)^l<K^2. **………………………………………(*2 puncte*)**

Deoarece n este divizibil prin K, trebuie să avem K≤n, deci

(√n)^l<n^2. Atunci, l<4, dar deoarece p1,p2,⋯,pl sunt numere

prime mai mici sau egale cu √n , p4=7>√n , astfel n<49. **…………(*2 puncte*)**

Analizând numerele mai mici decât 49,putem deduce că următoarele

numere satisfac condiția problemei: 24,12,8,6,4,3,2. **………………..(*1 punct*)**