Concursul județean de matematică ,, Infinity ”
Ediția a II-a, 8 iunie 2024
Barem de corectare și notare clasa a VIII-a

Problema I

Pe o tablă 2025x2025 se află un avion ascuns. La o mutare, alegem o celulă 1x1 pe care o împușcăm. Pentru a doborî avionul, trebuie să îl împușcăm de două ori. Atunci când avionul este împușcat prima oară, acesta se mută într-o celulă adiacentă (cu latură comună).

a) Dacă după fiecare mutare, am știi dacă am lovit sau nu avionul, care ar fi numărul minim de pași astfel încât să fim siguri că avionul este doborât? Justificați!

b) Dacă nu am știi după fiecare mutare dacă am nimerit sau nu avionul, care este numărul minim de mutări ce trebuie făcute pentru a fi siguri că avionul este doborât?

(Poinaru Rareș, X)

Soluție:

a) În cel mai rău caz, avionul va fi nimerit în ultima celulă țintită. Este important ca în strategia noastră să lovim ultima oară o celulă cu 2 vecini(colț), iar penultima oară o celulă cu cel mult 3 vecini. Astfel, numărul minim de mutări este 2025*2015+2=4060227. **……………... 3p**

b) Colorăm tabla în alb și negru ca o tablă de șah astfel încât celulele albe să fie mai puține. Împușcăm mai întâi celulele albe, apoi cele negre, apoi cele albe din nou. Acest lucru asigură doborârea avionului oriunde ar fi fost plasat, deoarece după ce împușcăm avionul, culoarea celulei pe care se află se schimbă. Minimul este 2030112+2030113+2030112=6090337**……………………………... 2p**

Justificăm acest minim. Împărțim tabla în dominouri de 1x2, ramânând o celulă liberă. Pentru ficare domino, ne trebuie cel puțin 3 lovituri, pentru

a

doborî avionul. (dacă am lovi o celulă, apoi cealaltă, e posibil ca avionul să fi fost în a doua celulă, astfel nu l-am doborî). Celula liberă trebuie și ea împușcată cel puțin o dată. Astfel, ne trebuie cel puțin 3*2030112+1=6090337 mutări**……………………………………...… 2p**

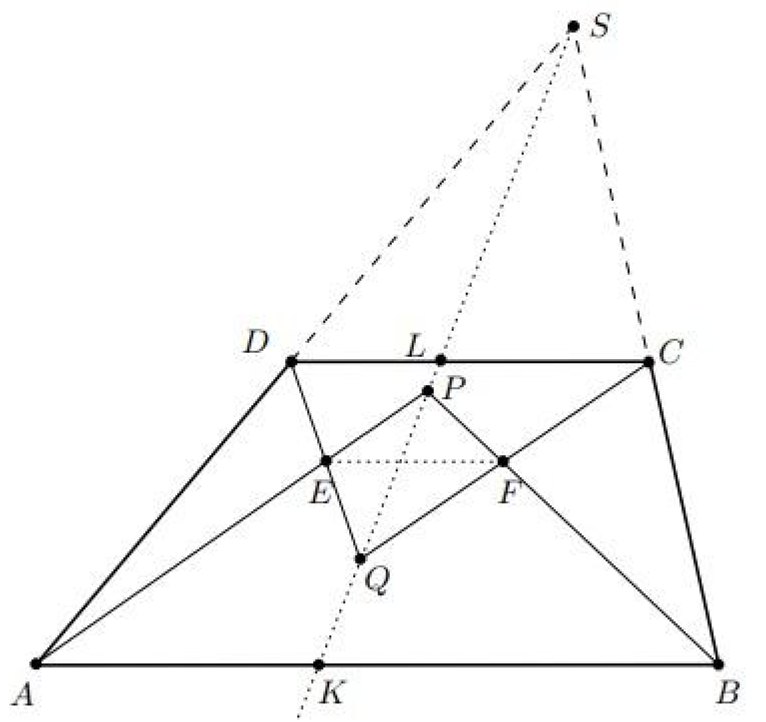
Problema II

Fie ABCD un trapez cu AB||CD și AB>CD. Punctele K și L se află pe AB și CD astfel încât AK/BK=DL/CL. Fie punctele P și Q în interiorul trapezului care satisfac ∢APB=∢BCD și ∢CQD=∢ABC.

a) Demonstrați că AD, BC și KL sunt concurente.
b) Demonstrați că punctele P, Q, B și C sunt pe același cerc (conciclice).

(Petrescu Matei, IX)

Soluție:



a) AD∩BC={S}. SK∩DC={T}. Aplicam Reciproca TFA in triunghiurile SKA si SKB => ST/SK=DT/AK si ST/SK=TC/KB => DT/AK=TC/KB, adica T=L => KL, AD si BC sunt concurente. **…………………..…3 puncte**
b) Fie AP∩DQ={E} si BP∩CQ={F}. Atunci ∠EPF=∠BCD si ∠FQE=∠ABC. Cum ∠BCD+∠ABC=180º => PEQF - patrulater inscriptibil. **…………………………………………………..1 punct**
Aplicam Menelaus in triunghiul ASP cu dr. DQ => AD/DS x SQ/QP x PE/EA =1. (1)

Aplicam din nou Menelaus in triunghiul BSP si dr. CQ => BC/CS x SQ/QP x PF/FB =1. (2)

Din (1) si (2) si AB||CD => EF||AB||CD**…………………….……..1 punct**

PEQF - p. inscriptibil =>$\angle$BCF+$\angle$FCD=$\angle$BCQ+$\angle$EFQ=$\angle$BCQ+$\angle$EPQ.

Pe de alta parte, $\angle$BCD=$\angle$APB=$\angle$EPF=$\angle$EPQ+$\angle$QPF.

Deci $\angle$BCQ=$\angle$QPF => $\angle$QPB este fie suplementar, fie coincide cu $\angle$BCF => P, Q, B si C - conciclice (formeaza patrulater inscriptibil). **…..2 punct**

Problema III

Să se rezolve sistemul:

1) $9y^2z^2 + 4x^2z^2 + 25x^2y^2 = 16x^2y^2z^2$
2) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$
3) $x - y\sqrt{3} + z\sqrt{15} = \frac{15}{2}$

(Buliga Sebastian, X)

Soluție:

1) $9y^2z^2 + 4x^2z^2 + 25x^2y^2 = 16x^2y^2z^2$
2) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$
3) $x - y\sqrt{3} + z\sqrt{15} = \frac{15}{2}$

Dacă x=0 => $9y^2z^2 = 0$ => y=0 sau z=0

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \text{ și } y=0 \Rightarrow z^2=9 \\ \Rightarrow z=\frac{15\sqrt{15}}{2\bullet 15}=\frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow z^2=\frac{15}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{imposibil}$$

Prin urmare, x diferit de 0

Analog, y diferit de 0 și z diferit de 0**…………………………..………..1 punct**

Deci x,y,z e R*

$$\begin{cases} \frac{9}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{25}{z^2}=16 \\ x^2+4y^2+z^2=9 \\ x-y\sqrt{3}+z\sqrt{15}=\frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{x^2}+\frac{16}{4y^2}+\frac{25}{z^2}=16 \\ x^2+4y^2+z^2=9 \\ x-y\sqrt{3}+z\sqrt{15}=\frac{15}{2} \end{cases}$$

Din Bergstrom => $\frac{9}{x^2}+\frac{16}{4y^2}+\frac{25}{z^2} \geq \frac{(3+4+5)^2}{x^2+4y^2+z^2} = \frac{144}{9} = 16$ =>

=> $\frac{9}{x^2}+\frac{16}{4y^2}+\frac{25}{z^2} \geq 16$, oricare ar fi x,y,z e R*, cu egalitate pentru $\frac{3}{x^2} = \frac{4}{4y^2} = \frac{5}{z^2}$ => $\frac{3}{x^2} = \frac{4}{4y^2} = \frac{5}{z^2} = \frac{3+4+5}{x^2+4y^2+z^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ => $x^2 = \frac{9}{4}$; $y^2 = \frac{3}{4}$; z^2

$= \frac{15}{4}$. => x= $\pm\frac{3}{2}$; y= $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; z= $\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ **…………………………..……….3 punct**

Vom analiza pe cazuri în funcție de semn relația (3)

$(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2})$ => $\frac{3}{2}$ - $\frac{3}{2}$ + $\frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ (A)

$(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2})$ => $\frac{3}{2}$ - $\frac{3}{2}$ - $\frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ (F)

$(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2})$ => $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ (F)

$(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2})$ => $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ - $\frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ (F)

$(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2})$ => - $\frac{3}{2}$ - $\frac{3}{2} + \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ (F)

$(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2})$ => - $\frac{3}{2}$ - $\frac{3}{2}$ - $\frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ (F)

$(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2})$ => - $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ (A)

$(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2})$ => - $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ - $\frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ (F)

În concluzie, soluțiile sistemului sunt S= { $(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2})$; $(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2})$ }.

………………………………………………………………..………..3 puncte