**Problema 1.** *Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ și fie pe segmentul $[BC']$ un punct variabil $P$, iar punctele $M$ și $N$ sunt proiecțiile punctului $P$ pe dreptele $B'C'$ și $BB'$.*

*a) Să se determine poziția punctului $P$, astfel încât suprafața poligonului obținut prin intersecția cubului cu planul ce conține punctele $M, N$ și este perpendicular pe planul $(BCC')$ să își atingă valorile extreme.*

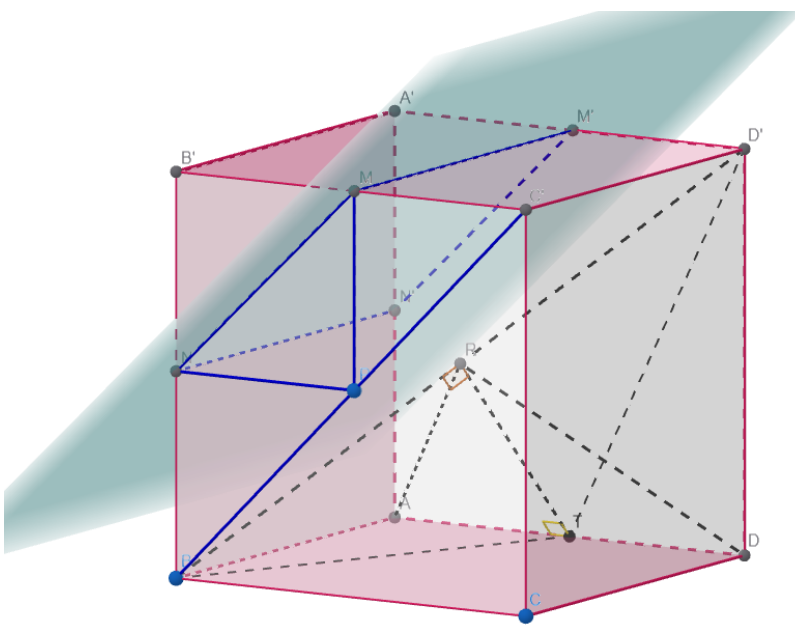
*b) Determinați distanța dintre dreptele $AD$ și $BD'$.*

*Buliga Sebastian, elev, Suceava*
*Taropa Tudor, elev, Brașov*

*Soluție:* $a$) Patrulaterul $MPNB'$ este dreptunghi, de unde rezultă $(B'P) \equiv (MN)$. Aria secțiunii este egală cu $MN \cdot A'B' = B'P \cdot A'B'$, și este minimă când $B'P$ este minimă, adică $B'P \perp BC'$, iar aria este maximă când $B'P$ este maximă, adică $B'P = B'C'$. Minimul se obține când $P$ este centrul feței $BCC'B'$, iar maximul se realizează când $P = C'$ ........................................ **(2p)**

$b$) Fie $T$ mijlocul lui $AD$ și $R$ mijlocul lui $BD'$. Arătăm că $TR$ reprezintă $d(AD, BD')$. Pentru aceasta vom arăta că $TR \perp AD$, respectiv $TR \perp BD'$.

Într-adevăr, în $\triangle D'TB$ isoscel ($D'T = TB$ din congruența triunghiurilor dreptunghice $D'TD$ și $ATB$), iar $TR$ mediană, deci și înălțime, adică $TR \perp BD'$ .................................... **(2p)**




(*Figura*)

Analog, în $\triangle DRA$ isoscel ($RD = RA$, din proprietățile diagonalelor în cub), cum $RT$ mediană și înălțime, rezultă că $RT \perp AD$ .............................................................. **(1p)**

Considerăm lungimea segmentului $AB = 2a$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle TRA$ dreptunghic, în care $AT = a$, $AR = a\sqrt{3}$, vom obține că $TR = a\sqrt{2}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(2p)**

**Problema 2.** *Determinați cel mai mic număr natural prim $p$ pentru care ecuația*

$$\left[\frac{5x-10}{3}\right] \cdot \left\{\frac{5x-10}{3}\right\} = \frac{p}{3}$$

*admite soluții în $\mathbb{Z}$.*

*Buliga Sebastian, elev, Suceava*

*Soluție:* Fie $m = \left[\frac{5x-10}{3}\right]$ și $n = \left\{\frac{5x-10}{3}\right\}$. Deoarece $n \geq 0$ rezultă că $m \geq 0$, deci $m$ este natural. Avem $m \cdot n = \frac{p}{3}$ și $m + n = \frac{5x-10}{3}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(2p)**

Prelucrând aceste relații, obținem că $5x - 10 = 3m + 3n$ și $n = \frac{p}{3m}$, adică $5x - 10 = 3m + \frac{p}{m}$. Cum $x$ este întreg, deducem că $\frac{p}{m}$ este număr întreg, dar $m$ este natural și $p$ este prim, deci obținem $m \in \{1, p\}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(2p)**

Pentru $m = 1$ obținem $n = \frac{p}{3}$, dar cum $n \in [0, 1)$ rezultă că $p \leq 2$. Așadar, în acest caz avem $p = 2$ și $x = 2$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(1p)**

Pentru $m = p$ obținem $n = \frac{1}{3}$ și rezultă că $x = \frac{3p+11}{5}$, dar cum $x$ este întreg deducem că $p = 5k + 3$, pentru un $k$ întreg. Astfel, în aces caz avem $p = 3$ și $x = 4$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(1p)**

În concluzie, cel mai mic număr natural prim $p$ pentru care ecuația dată admite soluții în $\mathbb{Z}$ este $p = 2$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(1p)**

**Problema 3.** *În tetraedrul $MATE$, laturile opuse au lungimile exprimate prin numere naturale cu produsul 8. Aflați volumul tetraedrului.*

*Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică*

*Soluție:* Din enunț, $MA \cdot TE = MT \cdot AE = AT \cdot ME = 8$ și, cum $8 = 1 \cdot 8$ sau $8 = 2 \cdot 4$ deducem că lungimile laturilor aparțin mulțimii $\{1, 2, 4, 8\}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(2p)**

Dacă avem o muchie de lungime 1, atunci, de exemplu, $MA = 1$, $TE = 8$, iar $|MT - AT| < MA$ și $|ME - AE| < MA$ implică $MT = AT$, $ME = AE$. Apoi, $ME + MT > ET$ arată că $ME > 4$ sau $MT > 4$, deci este posibilă doar situația în care muchiile care pornesc dintr-un vârf au lungime 8, iar celelalte muchii au lungime 1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(1p)**

Dacă nicio muchie nu are lungime 1 atunci există trei muchii de lungime 2 și trei muchii de lungime 4. În cazul în care cele trei muchii de lungime 2 ar porni din același vârf, atunci am avea o față cu muchii de lungime 2, 2 și 4 — imposibil. Rămâne astfel doar cazul când o față are muchiile de lungime 2, iar celelalte muchii au lungime 4. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(2p)**

Așadar, cazurile posibile conduc la o piramidă regulată cu latura bazei de 1 și muchia laterală 8 sau cu latura bazei de 2 și muchia laterală de 4. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(1p)**

În cazul când muchia laterală este $m$ și muchia bazei este $b$, înălțimea tetraedrului este $h = \frac{\sqrt{9m^2 - 3b^2}}{3}$ și volumul este $V = \frac{b^2\sqrt{3m^2 - b^2}}{12}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **(1p)**