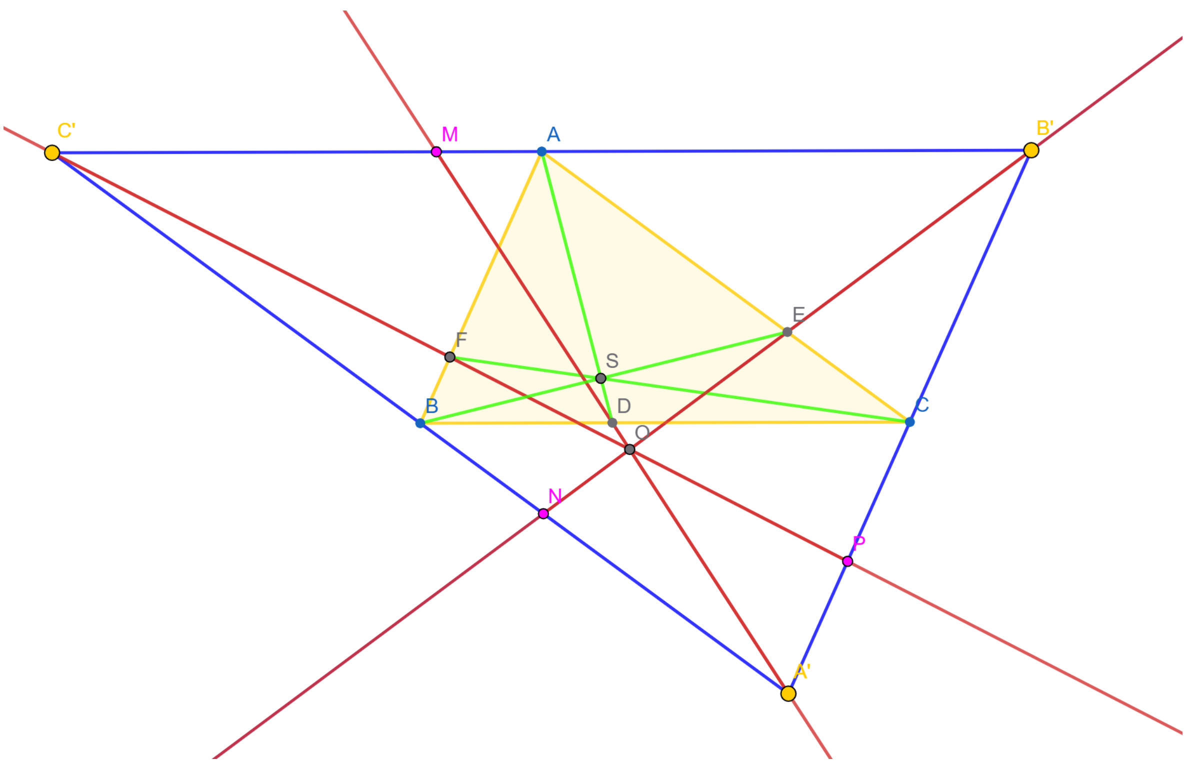
Concursul interjudețean de matematică și informatică “Infinity”
Ediția a III-a, 7 iunie 2025
Barem, clasa a VII-a

Problema 1. *Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și D, E, respectiv F trei puncte pe laturile BC, AC respectiv AB astfel încât dreptele AD, BE și CF sunt concurente. Considerăm A' punctul de intersecție dintre dreptele paralele la laturile AC, respectiv AB prin vârfurile B, respectiv C. În mod analog definim și punctele B', respectiv C'. Demonstrați că dreptele $A'D, B'E$ și $C'F$ sunt concurente.*

Prelucrare Gazeta Matematică

Soluție: Fie $\{M\} = AD' \cap B'C'$, $\{N\} = B'E \cap A'C'$ și $\{P\} = C'F \cap A'B'$. (*Figura 1*)



(*Figura 1*)

În triunghiul $MA'B'$ avem $DC \parallel MB'$, iar conform teoremei fundamentale a asemănării obținem $\dfrac{A'C}{A'B'} = \dfrac{DC}{MB'}$. Cum patrulaterele $BACA'$ și $ABCB'$ sunt paralelograme, deducem că $A'C = CB'$, de unde avem că $\dfrac{DC}{MB'} = \dfrac{1}{2}$. Astfel, $B'M = 2DC$. (1) .... **(1p)**

În triunghiul $MC'A'$ avem $DB \parallel AC'$, iar conform teoremei fundamentale a asemănării obținem $\dfrac{A'B}{A'C'} = \dfrac{BD}{AC'}$. Cum patrulaterele $ABA'C$ și $CBC'A$ sunt paralelograme, deducem că $BA' = C'B$, de unde avem că $\dfrac{BD}{MC'} = \dfrac{1}{2}$. Astfel, $MC' = 2BD$. (2) .... **(1p)**

În mod analog obținem că $C'N = 2AE, NA' = 2EC, A'P = 2BF$ și $PB' = 2AF$. (3) .... **(2p)**
Din (1), (2) și (3) obținem că

$$\frac{B'M}{MC'} \cdot \frac{C'N}{NA'} \cdot \frac{A'P}{PB'} = \frac{2DC}{2BD} \cdot \frac{2AE}{2EC} \cdot \frac{2BF}{2AF} = 1,$$

deoarece dreptele AD, BE și CF sunt concurente, iar conform teoremei lui Ceva avem

$$\frac{DC}{BD} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{BF}{AF} = 1.$$

Așadar, $\frac{B'M}{MC'} \cdot \frac{C'N}{NA'} \cdot \frac{A'P}{PB'} = 1$, iar conform reciprocii teoremei lui Ceva, concluzionăm că dreptele $A'D, B'E$ și $C'F$ sunt concurente. .... **(3p)**

Problema 2. *Aflați numerele naturale nenule a, b, c pentru care $2^a + 2^b + 2^c + 3$ este pătrat perfect.*

Cosmin Manea, Dragoș Petrică, Pitești, Gazeta Matematică

Soluție: Dacă $a, b, c \geq 2$, atunci $2^a + 2^b + 2^c + 3$ dă rest 3 la împărțirea cu 4, și un asemenea număr nu este pătrat perfect. .... **(1p)**

Dacă $a = b = c = 1$, atunci $2^a + 2^b + 2^c + 3 = 3^2$, deci acest caz convine. .... **(1p)**

Dacă exact două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 1, de exemplu $a = b = 1, c \neq 1$, atunci $2^a + 2^b + 2^c + 3 = 2^c + 7$ dă res 3 la împărțirea cu 4, deci nu e pătrat perfect. .... **(1p)**

Dacă unul dintre numere este egal cu 1, de exemplu $a = 1, b, c \neq 1$, atunci $2^a+2^b+2^c+3 = 2^b+2^c+5$ și distingem cazurile:

1. dacă $b, c \geq 3$, atunci $2^b + 2^c + 5$ dă rest 5 la împărțirea cu 8, deci nu este pătrat perfect;
2. dacă $b = c = 2$, atunci $2^b + 2^c + 5 = 13$ nu este pătrat perfect; .... **(1p)**
3. dacă unul dintre numerele b și c este egal cu 2, iar celălalt mai mare ca 2 (considerăm $b = 2$), atunci $2^b + 2^c + 5 = 2^c + 9$ și discutăm subcazurile
   (a) dacă c este impar, $2^c + 9 = (3 - 1)^c + 9$ dă rest 3 la împărțirea cu 3, deci nu este pătrat perfect;
   (b) dacă c este par, $c = 2d$, cu $d \in \mathbb{N}$, iar $2^c + 9 = k^2$ se scrie $k^2 - 2^{2d} = 9$, adică $(k - 2^d)(k + 2^d) = 9$. Cum $k + 2^d > 0$, rezultă că $0 < k - 2^d < k + 2^d \leq 9$. Astfel, obținem că $k - 2^d = 1, k + 2^d = 9$, de unde $k = 5, d = 2$, adică $c = 4$. .... **(2p)**

În concluzie, soluțiile sunt $a = b = c = 1$ și $\{a, b, c\} = \{1, 2, 4\}$. .... **(1p)**

Notă. Pentru simpla enunțare a soluțiilor se va acorda 1 punct.

Problema 3. *Considerăm un triunghi scalen ABC, (AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, BB' și CC' înălțimile din B și C, $B' \in AC, C' \in AB$. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, M mijlocul segmentului $[BC]$ și N mijlocul segmentului $[B'C']$ și P intersecția dreptelor MN și AD. Demonstrați că $HP \perp AD$.*

Daniel Văcărețu,
Concursul Interjudețean de matematică și informatică "Grigore Moisil"

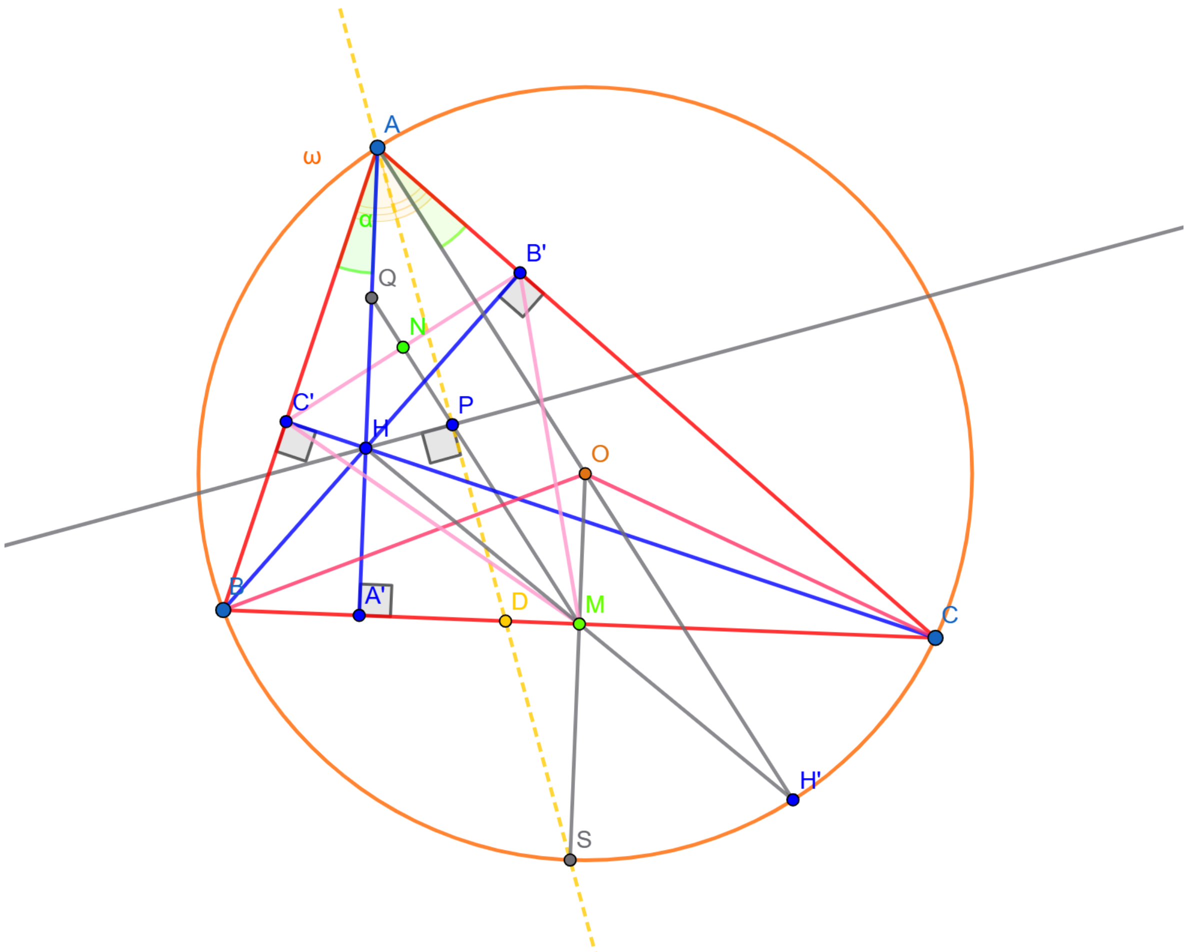
Soluție: Considerăm ω cercul circumscris triunghiului ABC și notăm O centrul acestuia. (Figura 2) Fie $\{S\} = AD \cap \omega$. Cunoaștem că $\{S\} = DM \cap \omega$, deoarece $\sphericalangle BOM = \sphericalangle BAS = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAC$.

Triunghiul OBC este isoscel și M este mijlocul segmentului BC, deci $OM \perp BC$, iar cum $AA' \perp BC$ deducem că $OM \parallel AA'$. Astfel, $\sphericalangle OSA = \sphericalangle SAA'$ (alterne interne)

Cum OAS este isoscel de bază AS deducem că $\sphericalangle OSA = \sphericalangle OAS$, și astfel $\sphericalangle OAS = \sphericalangle A'AS$. Notăm cu $\alpha = \sphericalangle BAA'$, $\sphericalangle ABA' = 90° - \alpha$. Cum $\sphericalangle OAS = \sphericalangle A'AS$ și $\sphericalangle BAS = \sphericalangle CAS$ obținem $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle OAC = \alpha$. (1) .... **(2p)**

Cum $BCB'C'$ este un patrulater inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle ABC = 90° - \alpha$, și folosind relația (1) deducem că $AO \perp B'C'$. (2) .... **(1p)**

Din teorema medianei în triunghiul dreptunghic BCC', pentru mediana corespunzătoare ipotenuzei obținem $C'M = \frac{1}{2} \cdot BC$. Procedăm în mod analog pentru triunghiul $BB'C$ și obținem că $B'M = \frac{1}{2} \cdot BC$, adică $C'M = B'M$. Cum N este mijlocul segmentului $B'C'$ și triunghiul $MB'C'$ este isoscel de bază $B'C'$ rezultă că $MN \perp B'C'$. (3) .... **(1p)**



(*Figura 2*)

Din (2) și (3) deducem că $AO \parallel MN$. Fie $\{Q\} = MN \cap AA'$. Astfel, $\sphericalangle QPA = \sphericalangle PAO$ (alterne interne) și cum $\sphericalangle QAP = \sphericalangle PAO$ obținem că $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QPA$, adică triunghiul APQ este isoscel. (și deci $AQ = QP$) (4)

Cum $AQ \perp BC, OM \perp BC$ și $AO \parallel QM$ obținem că patrulaterul $AQMO$ este paralelogram, și prin urmare $AQ = OM$. .... **(1p)**

Fie H' simetricul punctului A în raport cu punctul M. Astfel, $HBH'C$ este un paralelogram și prin urmare $BH \parallel H'C$ și $HC \parallel BH'$. Cum $BB' \perp AC$ deducem că $\sphericalangle ACH' = 90°$. Analog, $\sphericalangle ABH' = 90°$. Așadar, punctele A, O și H' sunt coliniare, iar cum OM este linie mijlocie în triunghiul AHH' obținem că $OM = \frac{1}{2} \cdot AH$.

Astfel, $AQ = QH = OM = \frac{1}{2} \cdot AH$ și folosind (4) rezultă că $AQ = QH = QP$. Conform reciprocii teoremei medianei, concluzionăm că triunghiul APH este dreptunghic în P, adică $HP \perp AD$... **(2p)**