Concursul interjudețean de matematică și informatică “Infinity”
Ediția a III-a, 7 iunie 2025
Barem, clasa a VI-a

Problema 1. *a) Un tablou sub formă de pătrat se împarte în 100 pătrățele identice, distribuite pe 10 linii și 10 coloane. Avem la dispoziție 10 cartonașe, numerotate diferit, cu cifre de la 0 la 9. Pe tablou trebuie să așezăm două cartonașe, având suma* 10 *în pătrățelele situate pe linii și coloane diferite. Determinați numărul de posibilități de așezare a acestor cartonașe.*

b) Să se arate că nu există numere naturale x, y, z astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 + x + 3y + 5z = 2025$.

Colecția Gazeta Matematică

Soluție: a) Suma cifrelor de pe tablou trebuie să fie egală cu 10, există doar 4 perechi de cartonașe care se pot plasa pe tablou $\{(1, 9); (2, 8); (3, 7); (4, 6)\}$. .... **(1p)**
Primul cartonaș se amplasează într-un pătrățel oarecare, deci avem 100 de posibilități de amplasare a acestuia. .... **(1p)**
Cel de-al doilea cartonaș poate fi așezat oriunde pe celelalte 9 linii și 9 coloane rămase. Deci, 81 de posibilități de amplasare a acestuia.
Cu alte cuvinte, pentru o pereche de cartonașe există $100 \cdot 81 = 8100$ de variante de amplasarea a acestora. .... **(1p)**
Cum avem 4 perechi posibile, avem în total $4 \cdot 8100 = 32400$ variante. .... **(1p)**

b) Dacă $x, y, z \in \mathbb{N}$, atunci x^2 și x au aceeași paritate, y^2 și $3y$ au aceeași paritate și z^2 și $5z$ au aceeași paritate. .... **(1p)**
Suma dintre două numere de acceași paritate este mereu un număr par. .... **(1p)**
Astfel $2025 = x^2 + x + y^2 + 3y + z^2 + 5z = par + par + par = par$. **(absurd!)**, deoarece 2025 este impar. .... **(1p)**

Problema 2. *a) Se consideră numerele naturale x, y, z, care satisfac egalitatea $13x + 8y = 5z$. Demonstrați că numărul $(x + y)(y + z)(z + x)$ este divizibil cu 130.*

b) Numerele naturale nenule m și n au proprietatea că numărul $m^{2016} + m + n^2$ este divizibil cu numărul mn. Arătați că m este pătrat perfect.

Aparaschivei Tudor, elev, Suceava

Soluție: a) Adăugând $5y$ în ambii membri ai relației, obținem că $13(x + y) = 5(y + z)$.
Cum 5 divide $13(x + y)$ și $(5, 13) = 1$, atunci 5 divide $x + y$, atunci $x + y = 5a$.
Cum 13 divide $5(y + z)$ și $(5, 13) = 1$, atunci 13 divide $y + z$, atunci $y + z = 13b$. .... **(1p)**
Adăugând $5x$ în ambii membri ai relației obținem că $2(9x + 4y) = 5(z + x)$.
Cum 2 divide $5(z + x)$ și $(2, 5) = 1$, atunci 2 divide $z + x$, atunci $z + x = 2c$. .... **(1p)**
Obținem că $(x + y)(y + z)(z + x) = 130abc$. Cum $a, b, c \in \mathbb{N}$, atunci $(x + y)(y + z)(z + x)$ se divide cu 130 .... **(1p)**

b) Fie $(m, n) = d$ și $a, b \in \mathbb{N}^2, (a, b) = 1$ cu $m = d \cdot a, n = d \cdot b$ .... **(1p)**

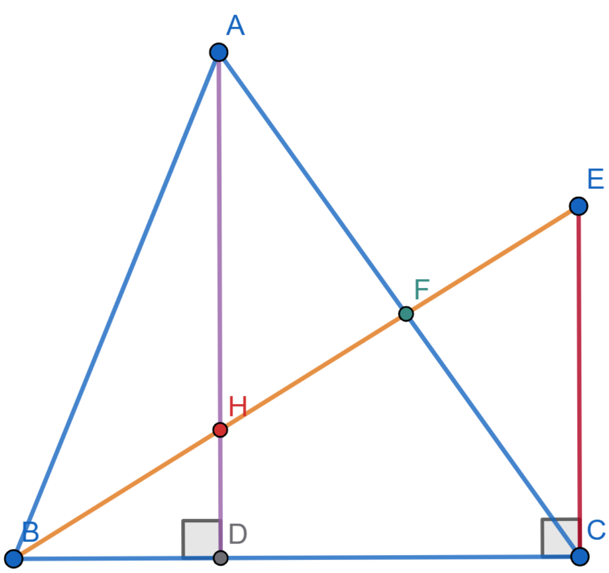
$$
\begin{aligned}
mn \mid m^{2016} + m + n^2 &\iff \\
d^2ab \mid d^{2016}a^{2016} + da + d^2b^2 &\iff \\
dab \mid d^{2015}a^{2016} + a + db^2 &\implies \\
d \mid d^{2015}a^{2016} + a + db^2&.
\end{aligned}
$$

Dar cum $d \mid d^{2015}a^{2016}$ și $d \mid db^2$, atunci $d \mid a$. .... **(1p)**
De asemenea, $a \mid d^{2015}a^{2016} + a + db^2$, dar $a \mid a^{2016}d^{2015} + a$. Cum $a \mid db^2, (a, b) = 1$, atunci $a \mid d$ **(1p)**
$a \mid d$ și $d \mid a$, atunci $a = d$, deci $m = ad = d^2$.
Astfel, m este pătrat perfect. .... **(1p)**

Problema 3. *Se consideră triunghiul ABC, AD înălțime și $AD = BC$. Pe perpendiculara în C pe dreapta BC se consideră un punct E astfel încât E și A sunt de aceeași parte a dreptei BC. Notăm cu H punctul de intersecție a dreptelor AD și BE. Arătați că $EC = DC$ dacă și numai dacă H este ortocentrul triunghiului ABC.*

Gheorghe Iacob, Pașcani, Gazeta Matematică

Soluție: "$\Longrightarrow$" Demonstrăm că dacă $EC = DC$, atunci H este ortocentrul triunghiului ABC. Avem $\triangle ADC \equiv \triangle BCE$, pentru că $AD = BC$ (din ipoteză) și $DC = CE$ (din ipoteză). .... **(2p)**



(*Figura*)

De aici rezultă că $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CBE$. Cum $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = 90°$ deducem că $\sphericalangle CBF + \sphericalangle BCF = 90°$ și atunci, în triunghiul BCF, $\sphericalangle BFC = 90°$, deci BF este înălțime în triunghiul ABC. Cum și AD este înălțime în triunghiul ABC rezultă H este ortocentrul triunghiului ABC. .... **(2p)**

"$\Longleftarrow$" Demonstrăm acum că dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci $EC = DC$. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC atunci $BF \perp AC$ și atunci $\sphericalangle CBF = \sphericalangle DAC = 90° - \sphericalangle BCA$. **(1p)**
De aici și din $BC = AD$ rezultă că $\triangle ADC \equiv \triangle BCE$, fiind dreptunghice. Atunci $DC = CE$.**(2p)**