Concursul interjudețean de matematică și informatică "Infinity"
Ediția a III-a, 7 iunie 2025
Barem, clasa a V-a

Problema 1. *a) Într-o clasă, dacă ar pleca un băiat și ar veni două fete, atunci numărul băieților ar fi egal cu $\frac{2}{3}$ din numărul fetelor, iar dacă ar pleca o fată și ar veni doi băieți, atunci numărul băieților ar fi egal cu numărul fetelor. Câți băieți și câte fete sunt în clasă?*

b) Demonstrați că există un singur număr natural n, astfel încât $n, n+2,$ $n+6, n+14, n+18$ să fie simultan numere prime.

Aparaschivei Tudor, elev, Suceava
Buliga Sebastian, elev, Suceava

Soluție: a) Fie b și f, numărul de băieți, respectiv numărul de fete.
Formalizând relațiile din enunț, rezultă că $b-1=\frac{2(f+2)}{3}$ și $b+2=f-1$.......... **(1p)**
Obținem că $f=b+3$, atunci $b-1=\frac{2(b+5)}{3}$, de unde obținem că $b=13$ băieți, iar înlocuind în $f=b+3$, $f=16$ fete. .... **(1p)**

b) În funcție de restul la împărțirea la 5, numărul n poate fi: $M_5, M_5+1, M_5+2, M_5+3, M_5+4$. .... **(1p)**
Dacă n este M_5, atunci $n=M_5$;
Dacă n este M_5+1, atunci $n+14=M_5$;
Dacă n este M_5+2, atunci $n+18=M_5$;
Dacă n este M_5+3, atunci $n+2=M_5$;
Dacă n este M_5+4, atunci $n+6=M_5$.

Cu alte cuvinte, unul dintre numere va fi mereu multiplu de 5. .... **(1p)**
Dacă $n>5$, atunci numărul care va fi multiplu de 5 va fi mai mare decât 5 și deci nu ar fi număr prim. Atunci pentru orice $n>5$ găsim un număr compus. .... **(2p)**
Prin tratarea cazurilor $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$, obținem că $n=5$ este singura soluție . ... **(1p)**

Problema 2. *a) Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ numere naturale nenule și un număr n definit prin $n=(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdot\ldots\cdot(a_{2024}+a_{2025})(a_{2025}+a_1)$. Demonstrați că n este par și aflați restul obținut la împărțirea cu 5 a numărului $N=4^n-1$.*

b) Pe o masă sunt 2025 cartonașe, pe o față albe, pe o față roșii. Le aranjăm în ordine crescătoare cu fața albă în sus, și procedăm după urmatorii pași:

Pasul 1: *Se întorc toate cartonașele pe fața roșie.*
Pasul 2: *Începând cu 2 și mergând din 2 în 2 se întorc cartonașele pe cealaltă parte.*
...
Pasul k: *Începând cu k și mergând din k în k se întorc cartonașele pe cealaltă parte.*

Determinați câte cartonașe vor fi cu fața roșie în sus după 2025 de pași.

Aparaschivei Tudor, elev, Suceava

Soluție: *a*) Considerăm un al 2026-lea termen, unde $a_{2026} = a_1$. Dacă o sumă de tipul $a_k + a_{k+1}$ este un număr par, atunci n este și el par. .... **(1p)**
Să presupunem că $a_k + a_{k+1}$ este impar $\forall k = \overline{1, 2025}$.
$a_1 + a_2 = 2k_1 + 1$
$a_2 + a_3 = 2k_2 + 1$
$a_3 + a_4 = 2k_3 + 1$
...
$a_{2024} + a_{2025} = 2k_{2024} + 1$
$a_{2025} + a_{2026} = 2k_{2025} + 1$
Însumând aceste relații, obținem că $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2025}) = 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_{2025}) + 2025$.
Absurd! Deoarece termenul stâng e par, însă cel din dreapta este impar. Atunci n este un număr par sau $n = 2k$. .... **(1p)**
$N = 4^n - 1 = 4^{2k} - 1$, atunci $\mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(4^{2k} - 1) = \mathcal{U}(4^{2k}) - 1 = 6 - 1 = 5$. Astfel, N dă restul 0 prin împărțirea la 5. .... **(1p)**

b) La fiecare pas k, cartonașele cu număr de forma M_k se întorc. La final, un cartonaș care s-a întors de un număr par de ori va fi alb, iar unul care s-a întors de un număr impar de ori va fi roșu. .... **(1p)**
Deoarece fiecare număr k de la 1 la 2025 întoarce toți multiplii săi, observăm că fiecare număr e întors de un număr de ori egal cu numărul divizorilor săi (fiecare divizor determină o schimbare a feței). .... **(1p)**
Cu alte cuvinte, numerele care după 2025 de pași s-au întors de un număr impar de ori, sunt numerele care au un număr impar de divizori, deci sunt pătrate perfecte. ..... **(1p)**
Cum $1^2, 2^2, \ldots, 45^2 \leq 2025$, atunci sunt 45 de cărți cu fața roșie în sus. .... **(1p)**

Problema 3. *a*) *Scrieți numărul* 35^{2013} *ca sumă de trei pătrate perfecte.*
b) *Determinați numerele prime* p *și* q, *știind că există* $x, y \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât* $p = x^2 + y^2 + 5$ *și* $q = x^3 + y$.

Gazeta Matematică

Soluție: *a*) Observăm că $35 = 1 + 9 + 25 = 1^2 + 3^2 + 5^2$. .... **(1p)**
$35^{2013} = 35 \cdot 35^{2012} = \left(1^2 + 3^2 + 5^2\right)\left(35^{1006}\right)^2 = \left(35^{1006}\right)^2 + \left(35^{1006} \cdot 3\right)^2 + \left(35^{1006} \cdot 5\right)^2$, o sumă de pătrate perfecte. .... **(1p)**
Cele 3 pătrate perfecte sunt: $\left(35^{1006}\right)^2, \left(35^{1006} \cdot 3\right)^2, \left(35^{1006} \cdot 5\right)^2$. .... **(1p)**

b) Numerele x^2 și x^3 au aceeași paritate.
Numerele y^2 și y au aceeași paritate.
Atunci și $x^2 + y^2$ și $x^3 + y$ au aceeași paritate. .... **(1p)**
Însă $p = x^2 + y^2 + 5$ și $q = x^3 + y$ au parități diferite. .... **(1p)**
Cum p și q sunt numere prime, atunci fie $p = 2$, fie $q = 2$. .... **(1p)**
Cum $p > 5$, atunci $q = 2$, de unde obținem că $x = y = 1$, astfel că $p = 7$.
Soluția finală este $p = 7$ și $q = 2$. .... **(1p)**