

Concursul Național Interdisciplinar
“Vrănceanu – Procopiu”
19 noiembrie 2025
ETAPA JUDEȚEANĂ
MATEMATICĂ

XI

Problema I (10 puncte)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a \cdot b \neq 0 \right\}$.

Să se determine mulțimea $D \subset M$ ce are simultan următoarele proprietăți:

- i) $\forall A, B \in D \Rightarrow A \cdot B \in D$;
- ii) $\text{card}(D) = 2025$.

Problema a II-a (10 puncte)

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive cu proprietatea că există șirul mărginit $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale pozitive astfel încât $x_{n+1} = x_n + na_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Demonstrați că șirul $\left(\frac{x_n}{n^3} \right)_{n \geq 1}$ este convergent;
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 x_1}{n^{p+1}} + \frac{a_2 x_2}{n^{p+2}} + \dots + \frac{a_n x_n}{n^{p+n}} \right)$, $p \geq 3$ fixat.

1. Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe câte o foaie separată.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de **3 ore** din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.