

Concursul Național Interdisciplinar
"Vrănceanu – Procopiu"

19 noiembrie 2025

ETAPA JUDEȚEANĂ

MATEMATICĂ – barem de rezolvare

IX

Problema I (10 puncte)

a) Rezolvați ecuația:

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2025| = 2026(x - 2026).$$

b) Să se demonstreze că:

$$\left\{ y \in \mathbf{R} \mid y = \frac{x - [x]}{x}, x \in [1, \infty) \right\} = \left[0, \frac{1}{2} \right)$$

Soluție

1 punct din oficiu.

a) Termenii ecuației din membrul stâng sunt nenegativi. Deci și membrul drept este nenegativ
 $x \geq 2026$ (2p)

$$\text{Ecuația devine } 2025x - \frac{2025 \cdot 2026}{2} = 2026x - 2026^2$$

de unde $x = 2027 \cdot 1013$ (1p)

care verifică ecuația (1p)

b) Observație:

$$x \in [1, 2) \quad 1 \geq \frac{[x]}{x} > \frac{1}{2} \quad \dots \quad 0 \leq 1 - \frac{[x]}{x} < \frac{1}{2} \quad \dots \dots \dots (2p)$$

$$k \leq x < k + 1, \quad k \geq 2,$$

$$1 \geq \frac{[x]}{x} > \frac{k}{k+1} \quad \dots \quad 0 \leq 1 - \frac{[x]}{x} < \frac{1}{k+1}$$

$$\text{rezultă } y \in \left[0, \frac{1}{k+1} \right) \subset \left[0, \frac{1}{2} \right)$$

Deci, pentru orice $y \in A$ rezultă $y \in \left[0, \frac{1}{2} \right)$, rezultă $A \subset \left[0, \frac{1}{2} \right)$ (2p)

Fie $y \in \left[0, \frac{1}{2} \right)$. $y \in \left[0, \frac{1}{2} \right)$ vom arăta că există $x \in [1, 2)$ astfel încât $y = 1 - \frac{[x]}{x}$

$$y = 1 - \frac{[x]}{x} \text{ rezultă } \frac{1}{x} = 1 - y, \text{ evident } x \in [1, 2)$$

Așadar $A = \left[0, \frac{1}{2} \right)$ (1p)

Concursul Național Interdisciplinar
"Vrănceanu – Procopiu"

19 noiembrie 2025

ETAPA JUDEȚEANĂ

MATEMATICĂ – barem de rezolvare

IX

Problema a II-a (10 puncte)

- a) Fie O ortocentrul triunghiului echilateral ABC. Arătați că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
b) Fie ABCD un patrulater convex. Se notează cu O_1, O_2 mijloacele diagonalelor AC și BD. Să se arate că:
i) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$;
ii) dacă $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{O_1O_2}$ atunci ABCD este paralelogram.

Soluție

1 punct din oficiu.

- a) Dacă A', B', C' sunt mijloacele segmentelor BC, AC, respectiv AB.

Triunghiul ABC este echilateral, O este și centru de greutate: (1p)

$$\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'} \quad \text{..... (2p)}$$

$$\text{De unde obținem că: } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = \vec{0} \quad \text{..... (1p)}$$

b)

- i) Fie P mijlocul lui AB și Q mijlocul lui DC.

$$\text{Avem } \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{PO_2} - \overrightarrow{PO_1} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2} - \frac{\overrightarrow{BC}}{2} \quad \text{..... (1p)}$$

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{QO_2} - \overrightarrow{QO_1} = \frac{\overrightarrow{CB}}{2} - \frac{\overrightarrow{DA}}{2} = \frac{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}}{2} \quad \text{..... (1p)}$$

$$2\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \quad \text{..... (1p)}$$

$$\text{ii) } 4\overrightarrow{O_1O_2} = 2 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \quad \text{..... (1p)}$$

$$4\overrightarrow{O_1O_2} = 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \text{ rezultă } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ rezultă ABCD paralelogram. (1p)}$$