

Concursul Național Interdisciplinar
“Vrănceanu – Procopiu”
19 noiembrie 2025
ETAPA JUDEȚEANĂ
MATEMATICĂ – barem de rezolvare

X

Problema I (10 puncte)

- a) Arătați că $z = (7 + 4i)^{100} + (4 + 7i)^{100}$ este număr real, unde i este unitatea imaginară .
- b) Se dau numerele complexe z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Demonstrați că $z_1^{2025} + z_2^{2025} + z_3^{2025} = 1$.

Soluție

Din oficiu **1p**

a)	$\bar{z} = \overline{(7 + 4i)^{100} + (4 + 7i)^{100}} = (7 - 4i)^{100} + (4 - 7i)^{100} =$ $= [(-i)(4 + 7i)]^{100} + [(-i)(7 + 4i)]^{100} = (4 + 7i)^{100} + (7 + 4i)^{100} = z$ $\bar{z} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$	1p 2p 1p
b)	$z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_1 ^2 = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1} . \text{ Analog } \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2} \text{ și } \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$ $1 = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$ $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1 \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{1 - z_3}{-z_3} \Leftrightarrow \frac{1 - z_3}{z_1 z_2} = \frac{1 - z_3}{z_1 + z_2 - 1} \Leftrightarrow (1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0 ,$ de unde rezultă că unul din numere este egal cu 1 și suma celorlalte două este egală cu 0. Fie, de exemplu, $z_1 = 1$ și $z_2 + z_3 = 0$, deci $z_3 = -z_2$, de unde $z_1^{2025} + z_2^{2025} + z_3^{2025} = 1$	1p 1p 2p 1p

**Concursul Național Interdisciplinar
“Vrănceanu – Procopiu”**

19 noiembrie 2025

ETAPA JUDEȚEANĂ

MATEMATICĂ – barem de rezolvare

X

Problema a II-a (10 puncte)

a) Arătați că $\left(\frac{3}{5}\right)^{\lg 7} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{\lg 3} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{\lg 5} = 1$

b) Demonstrați că $\log_a \frac{2a}{2a+1} - \log_2 \frac{2a}{2a+1} \geq 2$, pentru orice $a \in (0,1)$.

Soluție

Din oficiu **1p**

a)	$\lg \left(\left(\frac{3}{5} \right)^{\lg 7} \cdot \left(\frac{5}{7} \right)^{\lg 3} \cdot \left(\frac{7}{3} \right)^{\lg 5} \right) = \lg 7 \cdot (\lg 3 - \lg 5) + \lg 3 \cdot (\lg 5 - \lg 7) + \lg 5 \cdot (\lg 7 - \lg 3) =$ $= \lg 7 \cdot \lg 3 - \lg 7 \cdot \lg 5 + \lg 3 \cdot \lg 5 - \lg 3 \cdot \lg 7 + \lg 5 \cdot \lg 7 - \lg 5 \cdot \lg 3 = 0, \text{ de unde}$ $\left(\frac{3}{5} \right)^{\lg 7} \cdot \left(\frac{5}{7} \right)^{\lg 3} \cdot \left(\frac{7}{3} \right)^{\lg 5} = 1$	2p 2p
b)	$\frac{2a}{2a+1} = \frac{2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}}{a + \frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{a}{2}} \text{ (inegalitatea mediilor)}$ $\log_a \frac{2a}{2a+1} - \log_2 \frac{2a}{2a+1} = \log_a \frac{2a}{2a+1} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{2a}{2a+1} \geq \log_a \sqrt{\frac{a}{2}} + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{a}{2}} =$ $= \frac{1}{2} \left(2 + \log_a \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} a \right)$ Cum $\log_a \frac{1}{2} > \log_a 1 = 0$, rezultă că $\log_a \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} a = \log_a \frac{1}{2} + \frac{1}{\log_a \frac{1}{2}} \geq 2$, de unde $\frac{1}{2} \left(2 + \log_a \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} a \right) \geq 2$	2p 1p 1p 1p