

Concursul Național Interdisciplinar
“Vrănceanu – Procopiu”
19 noiembrie 2025
ETAPA JUDEȚEANĂ
MATEMATICĂ – barem de rezolvare

XI

Problema I (10 puncte)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a \cdot b \neq 0 \right\}$.

Să se determine mulțimea $D \subset M$ ce are simultan următoarele proprietăți:

- i) $\forall A, B \in D \Rightarrow A \cdot B \in D$;
- ii) $\text{card}(D) = 2025$.

Soluție

Dacă $A \in D \Rightarrow A^n \in D \Rightarrow D = \{A, A^2, A^3, \dots, A^{2025}\}$ 2 puncte

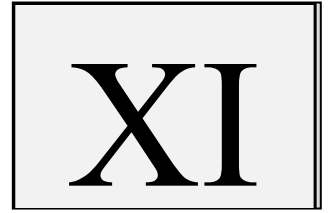
Considerăm $B \in D \Rightarrow D = \{BA, BA^2, BA^3, \dots, BA^{2025}\}$ 2 puncte

Se obține $B \cdot A \cdot B \cdot A^2 \cdot \dots \cdot B \cdot A^{2025} = A \cdot A^2 \cdot \dots \cdot A^{2025} \xRightarrow{a \cdot b \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}} B^{2025} = I_2 \Rightarrow A^{2025} = I_2$ 3 puncte

$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{2025} = 1 \\ b^{2025} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \cos \frac{2k_1\pi}{2025} + i \sin \frac{2k_1\pi}{2025} \\ b = \cos \frac{2k_2\pi}{2025} + i \sin \frac{2k_2\pi}{2025} \end{cases}, k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, 2024\}$ 2 puncte

Oficiu 1 punct.

Concursul Național Interdisciplinar
“Vranceanu – Procopiu”
19 noiembrie 2025
ETAPA JUDEȚEANĂ
MATEMATICĂ – barem de rezolvare



Problema a II-a (10 puncte)

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive cu proprietatea că există șirul mărginit $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale pozitive astfel încât $x_{n+1} = x_n + na_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Demonstrați că șirul $\left(\frac{x_n}{n^3}\right)_{n \geq 1}$ este convergent;
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 x_1}{n^{p+1}} + \frac{a_2 x_2}{n^{p+2}} + \dots + \frac{a_n x_n}{n^{p+n}} \right)$, $p \geq 3$ fixat.

Soluție

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{3n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \cdot \frac{n}{3n^2 + 3n + 1} \right)^{a_n \text{ mărginit}} = 0$ 2 puncte

Conform Lemei Cesaro-Stoltz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^3} = 0$ 1 punct

b) $x_{n+1} - x_n = n \cdot a_n > 0 \Rightarrow x_n$ crescător1 punct
 a_n pozitiv și mărginit

$\Rightarrow 0 < a_n \leq M \Rightarrow 0 < \frac{a_1 x_1}{n^{p+1}} + \frac{a_2 x_2}{n^{p+2}} + \dots + \frac{a_n x_n}{n^{p+n}} \leq M \cdot x_n \cdot \left(\frac{1}{n^{p+1}} + \frac{1}{n^{p+2}} + \dots + \frac{1}{n^{p+n}} \right)$ 2 puncte

$\frac{1}{n^{p+1}} + \frac{1}{n^{p+2}} + \dots + \frac{1}{n^{p+n}} < \frac{1}{n^p} \Rightarrow M \cdot x_n \cdot \left(\frac{1}{n^{p+1}} + \frac{1}{n^{p+2}} + \dots + \frac{1}{n^{p+n}} \right) < M \cdot \frac{x_n}{n^p}$ 2 puncte

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(M \cdot \frac{x_n}{n^p} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(M \cdot \frac{x_n}{n^3} \cdot \frac{1}{n^{p-3}} \right) \stackrel{\text{conform subpunct a}}{=} 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 x_1}{n^{p+1}} + \frac{a_2 x_2}{n^{p+2}} + \dots + \frac{a_n x_n}{n^{p+n}} \right) = 0$ 1 punct

Oficiu 1 punct