Colegiul Național Ștefan cel Mare Suceava

CONCURSUL CLASELOR A VIII-A

EDIȚIA A XVIII-A

28 mai 2021

PRIMĂRIA MUNICIPIULUI SUCEAVA

SUBIECT – Clasa a VIII-a

B MATEMATICĂ

B.1. Să se calculeze: $\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{2+\sqrt{5}}{4}-\left(\sqrt{7}-\frac{5}{4\sqrt{7}}\right)\sqrt{7}$. (10 puncte)

B.2.1. Să se demonstreze că $x^4+1\geq x^3+x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Când are loc egalitatea?

(5 puncte)

B.2.2. Să se rezolve ecuația: $\frac{x^2+2}{3}+\frac{x^2+4}{5}+\ldots+\frac{x^2+42}{43}=21$. (5 puncte)

B.3. Fie mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{2+x-x^2}{x^2-x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.

B.3.1. Să se arate că A$\neq\emptyset$.

(5 puncte)

B.3.2. Să se determine mulțimea A.

(5 puncte)

B.4. Fie numerele $x_n=2^n+3^n,\ n\in\mathbb{N}$.

B.4.1. Să se arate că $x_n x_{n+1}$ se divide cu 5, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(5 puncte)

B.4.2. Să se arate că x_n nu este pătrat perfect, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(5 puncte)

B.5. Romburile *ABCD* și *ABEF* sunt incluse în plane perpendiculare, iar unghiurile $\sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle$ABE au ambele măsura 60^o.

B.5.1. Dacă $AB=a$, să se afle volumul tetraedrului *FADC*.

(5 puncte)

B.5.2. Tot pentru AB=a, să se afle distanța dintre dreptele *AB* și *FD*. Să se afle valoarea uneia dintre funcțiile trigonometrice a măsurii unghiului determinat de cele două drepte. (10 puncte)

S U C C E S!

BAREME ORIENTATIVE

MATEMATICĂ

B.1.

$\frac{1}{\sqrt{5-1}} - \frac{2+\sqrt{5}}{4} - (\sqrt{7} - \frac{5}{4\sqrt{7}})\sqrt{7} =$ 3p

$= \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{2+\sqrt{5}}{4} - (7 - \frac{5}{4}) =$......................................3p

= -6 .... 3p

Oficiu 1p

B.2.1.

Relația din enunț se scrie succesiv:

$x^4 + 1 - x^3 - x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ <=> ……………………………………….…0.5p

<=> $x^3(x-1) - (x-1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ <=>……………………………......0.5p

<=> $(x^3-1)(x-1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ <=>……………………………………....1p

<=> $(x-1)^2(x^2+x+1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.………………………………………1p

Dar $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$…………1p

Deci relația cerută se realizează, pentru orice x real și avem egalitate doar când și numai când x=1……………………………………………………………….…1p

B.2.2.

Distribuind câte un 1 fiecărui termen din membrul stâng,obținem: 1p

$\frac{x^2-1}{3}+\frac{x^2-1}{5}+\cdots+\frac{x^2-1}{43}=0$, de unde...1p

$(x^2-1)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{43}\right)=0$..1p

Cum membrul drept este diferit de 0, trebuia ca $x^2-1=0$.....................0.5p

Adică $x \in \{-1,1\}$. 0.5p

Oficiu...1p

B.3.

B.3.1.

Se observă că $x=0 \Rightarrow \frac{2+x-x^2}{x^2-x+1}=2 \in \mathbb{N}$ 5p

Orice alt exemplu corect primește punctaj integral.

B.3.2.

Notăm $\frac{2+x-x^2}{x^2-x+1}=k \in \mathbb{N}$. 0.5p

Explicitând:

$x=\frac{k+1\pm\sqrt{(k+1)^2-4(k+1)(k-2)}}{2(k+1)}$. 1p

Ca x să exite trebuie ca $\Delta \geq 0$. 0.5p

Obținem:

$k^2-2k-3 \leq 0$, care se scrie $(k+1)(k-3) \leq 0$, de unde se obțin valorile

$k \in \{0,1,2,3\}$. ……………………………………………………………..1p

Efectuând calculele, avem $x \in \left\{-1,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2\right\}$. 1p

Oficiu ………………………………………………………...1p

B.4.1.

$x_n \cdot x_{n+1} = (2^n + 3^n)(2^{n+1} + 3^{n+1})$……………………………………..1p

Dintre n și n+1 sigur unul dintre ele este impar, iar $u(2^{2k+1} + 3^{2k+1}) =$

$$u(2 \cdot 4^k + 3 \cdot 9^k) \in \{u(2 \cdot 4 + 3 \cdot 9), u(2 \cdot 6 + 3 \cdot 1)\} = \{5\}$$

$(2^{2k+1} + 3^{2k+1}) \vdots 5$. *3p*

Cum printre n și n+1 se găsește unul impar, concluzia este imediată. 1p

B.4.2

$u(2^{2k} + 3^{2k}) = u(4^k + 9^k) \in \{u(4+9), u(6+1)\} = \{3,7\}$. ………………0,5p

Deci clar pt n par, $u(x_n) \in \{3,7\}, x_n$ nu poate fi pătrat perfect.........................0,5p

Pentru n impar, n=2k+1, k natural:

$x_n = 2^n + 3^n = 2^{2k+1} + 3^{2k+1} = 2 \cdot 4^k + M_3 = 2 \cdot (3+1)^k + M_3 = 2(M_3 + 1) +$
$+ M_3 = M_3 + 2$. ……………………………………………………………………1p

După cum se știe pătratele perfecte în raport cu 3 pot da doar resturile 0, respectiv 1.

Așadar pentru n impar x_n nu este pătrat perfect…………………………………1p

Deci pentru niciun n natural, x_n nu este pătrat perfect. …………………………..1p

Oficiu……………………………………………………………………...1p

B.5.1

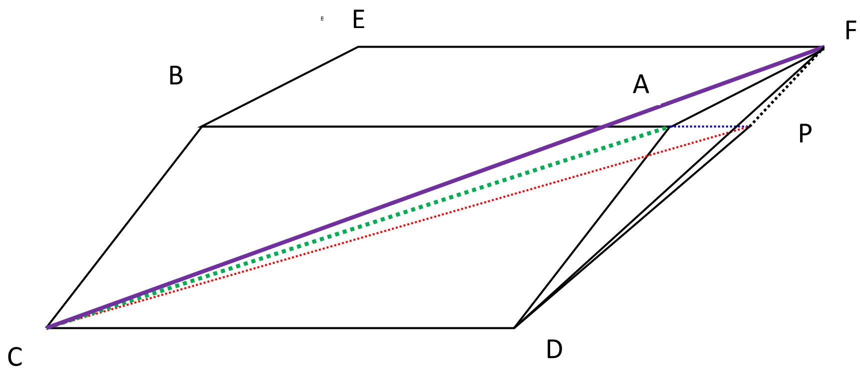

Figura...1p

Fie $P = pr_{AB}F$. Avem $FP \perp$ (ADC), de unde

$FP = FA \sin 60°, FP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. 1p

$A_{\Delta ADC} = \frac{CD \cdot AD \cdot \sin(120°)}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. 2p

$V_{FADC} = A_{\Delta ADC} \cdot \frac{FP}{3} = \frac{a^3}{8}$. 1p

B.5.2

$PA = FA\ cos60° = \frac{a}{2}$.

$BP = \frac{3a}{2}$.

$CP^2 = BC^2 + BP^2 - 2BC \cdot BP \cdot cos120°$

$CP = \frac{a\sqrt{19}}{2}$ 0.5p

$CF^2 = FP^2 + CP^2$

$FC = \frac{a\sqrt{22}}{2}$ 0.5p

$DP^2 = AP^2 + AD^2 - 2AP \cdot AD \cdot cos120°$

$DP = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

$DF^2 = FP^2 + DP^2$

$DF = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

$DP^2 = AP^2 + AD^2 - 2AP \cdot AD \cdot \cos\left(\widehat{FDC}\right)$

$\cos\left(\widehat{FDC}\right) = \frac{-2}{\sqrt{10}}$ 1p

$\cos\left(\left(\widehat{FD, AB}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{10}}$ (unghiul dintre 2 drepte e ascuțit!)......................0.5p

Dar $AB \parallel (\mathrm{FDC})$, de unde $\mathrm{d}(\mathrm{AB}, \mathrm{FD}) = \mathrm{d}\big(\mathrm{AB}, (\mathrm{FDC})\big) = \mathrm{d}\big(\mathrm{A}, (\mathrm{FDC})\big) := \mathrm{d}$.

$V_{FADC} = A_{\Delta FDC} \cdot \frac{d}{3}$

$A_{\Delta FDC} = \frac{FD \cdot CD \cdot \sin(\widehat{FDC})}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

$V_{FADC} = \frac{a^2\sqrt{6}}{12} \cdot d$

$d = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ 1.5p

Oficiu...1p