



CONCURSUL MATE & INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediția a VIII-a, 19 iunie 2021

CLASA a IX-a

Pentru problemele 1-7 veți nota pe foaia de examen doar litera corespunzătoare fiecărui răspuns corect (fiecare problemă are un singur răspuns corect). La problema 8 veți scrie rezolvarea completă.

1. Pentru fiecare număr natural nenul $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor sale. Valoarea minimă a raportului $\frac{s(4n)}{s(n)}$ este:

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{9}$ E. $\frac{2}{5}$

2. Numărul soluțiilor întregi ale ecuației $\left[\sqrt{n+1} \right] + \left[\frac{2n+1}{4} \right] = n, n \in \mathbb{Z}$ este:

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit astfel: $x_4 = \frac{1}{3}$ și $x_{n+1} = \frac{n+1}{n+4} \left(x_n + \frac{1}{3} \right), \forall n \geq 1$. Partea întreagă a termenului x_{2021} este:

- A. 168 B. 169 C. 2020 D. 2021 E. 334

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care verifică relația $(f \circ f)(x) = f(x) + 2020x, \forall x \in \mathbb{R}$. Valoarea funcției în punctul $x=0$ este:

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 2021 E. 2020

5. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, cu proprietatea că $f(g(x)) = g(f(x)) = x+1$, pentru orice număr natural x . Expresia $f(n) + g(n)$ este egală cu:

- A. $2n$ B. $2n+3$ C. $2n+2$ D. $2n-1$ E. $2n+1$

6. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A , $[AE]$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, cu $E \in (BC)$.

Notăm cu I centrul cercului înscris în triunghi. Valoarea minimă a raportului $\frac{IE}{IA}$ este:

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. Fie A și B două puncte din plan. Valoarea numărului real $k \in (0, \infty)$ pentru care există exact două puncte M cu proprietatea că $MA^2 + MB^2 = k \cdot \text{aria}(\triangle AMB)$ este:

- A. 2 B. 6 C. 4 D. 5 E. 3

8. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$, cu $a + b + c = 1$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} \leq \frac{1}{4}$$

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. La problemele 1-7 se punctează cu 10p fiecare răspuns corect. La problema 8 punctajul maxim acordat este de 20p. Se acordă 10 puncte din oficiu.
2. Timp de lucru: 90 minute.



CONCURSUL MATE & INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediția a VIII -a, 19 Iunie 2021

Barem clasa a IX –a

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
B	D	A	C	E	D	C

8.

$\sum \frac{ab}{c+1} = \sum \frac{ab+abc}{c+1} - abc \sum \frac{1}{a+1} = \sum ab - abc \sum \frac{1}{a+1} \dots\dots\dots$	7p
$\left(\sum \frac{1}{a+1} \right) \cdot \sum (a+1) \geq 9 \Rightarrow \sum \frac{1}{a+1} \geq \frac{9}{4} \dots\dots\dots$	7p
Arată că $ab + bc + ca - \frac{9}{4}abc \leq \frac{1}{4} \dots\dots\dots$	6p

*Notă: La problemele 1-7 se punctează cu 10p fiecare răspuns corect. La problema 8 punctajul maxim acordat este de 20p. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Total: 100 puncte.*