CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a VIII-a, 19 iunie 2021

CLASA a XI-a

Pentru problemele 1-7 veți nota pe foaia de examen doar litera corespunzătoare fiecărui răspuns corect (fiecare problemă are un singur răspuns corect). La problema 8 veți scrie rezolvarea completă.

1. Fie $A \in M_{2021}(\mathbb{R})$, cu proprietatea că există două matrice $C, D \in M_{2021,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{2021,1}\}$, pentru care $AC = O_{2021,1}$ și $AD \neq O_{2021,1}$. Considerăm $A_1 = A^*$ și $A_n = A^*_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Ce valoare poate avea rangul matricei A_{2022}?

A. 2021 B. 1 C. 0 D. 1011 E. 2020

2. Fie:

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \cdots + \frac{1}{n \ln n} \right).$$

Atunci:

A. $0 < L \leq 1$ B. $1 < L \leq 5$ C. $5 < L \leq 10$ D. $10 < L \leq 10^3$ E. Alt răspuns

3. Să presupunem că dispunem de un număr oricât de mare de zaruri obișnuite, cu 6 fețe. Care este numărul minim n de zaruri de care avem nevoie pentru ca probabilitatea următorului eveniment să fie maximă: E(n): „Aruncând, pe rând, cele n zaruri, se obține o singură dată fața cu numărul 6''?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

4. Numărul soluțiilor ecuației matriceale: $X^2 - X + I_n + X^t \cdot X = O_n$, unde $X \in M_n(\mathbb{R})$ și $n \in \mathbb{N}^*$, este:

A. 1 B. 0 C. 2 D. O infinitate E. Alt răspuns

5. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\operatorname{rang}(B) \leq \operatorname{rang}(B^2)$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată:

A) Matricea B este fie matricea nulă, fie inversabilă, fie idempotentă;

B) $\operatorname{rang}(AB^2) = \operatorname{rang}(AB)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

C) $\operatorname{rang}(AB^2) \geq \operatorname{rang}(AB)$, și există matrice A, B în care inegalitatea este strictă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

D) $\operatorname{rang}(AB^2) \leq \operatorname{rang}(AB)$, și există matrice A, B în care inegalitatea este strictă doar pentru $n = 2$;

E) $\text{rang}(AB^2) \leq \text{rang}(AB)$, și există matrice A, B în care inegalitatea este strictă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Considerăm $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 = 2$, iar pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} = \frac{n^2 - 1}{a_n} + 2.$$

Atunci $\lim_{n\to\infty} (a_n - n)$ este egală cu:

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 0 D. ∞ E. Nu există

7. Considerăm șirurile $(y_n)_{n\geq 1}$, $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = 2$, iar pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1 + \sqrt{x_n^2 + 2x_n + 5}}{2}; y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2 - 1}.$$

Ce se poate afirma despre șirul $(y_n)_{n\geq 1}$?

A) Este convergent și are limita un număr rațional pozitiv;
B) Este convergent și are limita un număr irațional pozitiv;
C) Este divergent, cu limita $+\infty$;
D) Are aceeași natură cu șirul $(x_n)_{n\geq 1}$;
E) $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

8. Primii cinci termeni ale unei secvențe de numere naturale sunt 1,2,3,4,5. Începând cu al șaselea termen, fiecare număr este predecesorul produsului tuturor numerelor de dinaintea sa. Considerăm următoarea propoziție:

$P(M)$: „Produsul primilor M termeni coincide cu suma pătratelor primilor M termeni.''

Să se determine toate numerele naturale nenule M pentru care $P(M)$este adevărată.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. La problemele 1-7 se punctează cu 10p fiecare răspuns corect. La problema 8 punctajul maxim acordat este de 20p. Se acordă 10 puncte din oficiu.
2. Timp de lucru: 90 minute.

CONCURSUL MATE && INFO
Secțiunea MATEMATICĂ
Ediţia a VIII -a, 19 Iunie 2021

Barem clasa a IX –a

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
C	E	D	B	B	A	A

8. Soluție: Pentru $M \leq 5$, observăm că doar $P(1)$ este adevărată. Fie de acum $M \geq 6$.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ secvența noastră, deci $a_i = i, \forall i = \overline{1,5}$ și relația de recurență este:

$$a_n = \prod_{i=1}^{n-1} a_i - 1, \forall n \geq 6 \Rightarrow a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n} a_i - 1 = a_n(a_n+1) - 1 = a_n^2 + a_n - 1, \forall n \geq 6. (1)$$

Avem că $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ (2), și rearanjând relația de la (1):

$$a_{n+1} - a_n + 1 = a_n^2, \forall n \geq 6 \Rightarrow \sum_{i=6}^{M} a_i^2 = a_{M+1} - a_6 + (M-5). (3)$$

Astfel, combinând (2) și (3), și ținând cont că $a_6 = 5! - 1 = 119$:

$$\sum_{i=1}^{M} a_i^2 = 55 + a_{M+1} - 119 + (M-5) = a_{M+1} + M - 69. (4)$$

De asemenea,

$$\prod_{i=1}^{M} a_i = a_{M+1} + 1. (5)$$

Din (4) și (5), obținem, în final, că:

$$\sum_{i=1}^{M} a_i^2 = \prod_{i=1}^{M} a_i \Leftrightarrow a_{M+1} + M - 69 = a_{M+1} + 1 \Leftrightarrow M = 70.$$

Prin urmare, $P(M)$este adevărată $\Leftrightarrow M \in \{1, 70\}$.

Verificare pentru $M \leq 5$...	5p
$a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n} a_i - 1 = a_n(a_n+1) - 1 = a_n^2 + a_n - 1, \forall n \geq 6$.............	5p
$\sum_{i=6}^{M} a_i^2 = a_{M+1} - a_6 + (M-5)$..	4p
$\prod_{i=1}^{M} a_i = a_{M+1} + 1$..	4p
Finalizare $P(M)$este adevărată $\Leftrightarrow M \in \{1, 70\}$..	2p

Notă: La problemele 1-7 se punctează cu 10p fiecare răspuns corect. La problema ***8*** *punctajul maxim acordat este de 20p. Se acordă 10 puncte din oficiu.*

Total: 100 puncte.