Clasa a V-a
Bareme

Problemele 1-6 sunt probleme tip grilă, ce conțin cinci răspunsuri posibile, iar numărul răspunsurilor corecte este cuprins între 1 și 5. Punctajul unei astfel de probleme poate fi:

- 0 puncte – dacă nu a fost dat niciun răspuns sau printre răspunsurile indicate există cel puțin unul incorect;
- 5 puncte – dacă toate răspunsurile indicate sunt corecte, dar lipsește cel puțin un răspuns corect;
- 10 puncte – dacă răspunsurile indicate coincid cu toate răspunsurile corecte ale problemei.

Pentru problema 7 se cere redactarea completă a soluției. Punctajul corespunzător acordat unei rezolvări corecte și complete este de 30 puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

1.Cinci colindători au strâns suma de 2021 de lei. Pentru că nu puteau să împartă acești bani în mod egal, au hotărât să procedeze astfel: împart suma într-un număr minim de plicuri, astfel încât fiecare plic conține o sumă de bani care se exprimă printr-o putere a lui 2. Ordonează plicurile în ordinea crescătoare a sumei de bani conținute, deci vor şti sigur că primul plic va conține cei mai puțini bani.Primul colindător ia primul plic, al doilea colindător ia al doilea plic și așa mai departe, până ajunge al cincilea colindător să ia plicul cu numărul cinci.Dacă mai sunt plicuri, primul colindător va lua plicul al şaselea și vor continua, în aceeaşi ordine,pînă se termină toate plicurile. Când ajung acasă, constată că:

A) Primul colindător are cei mai puțini bani.

B) Al doilea colindător are 516 lei.

C) Al treilea colindător este cel mai norocos, are cei mai mulți bani.

D) Al patrulea colindător are un număr de bani interesant, deoarece este și pătrat perfect și cub perfect.

E) Al cincilea colindător are un număr de bani care dă restul 11 prin împărțirea la 13.

__**Soluție:**__Vom transforma numărul 2021 din baza 10 în baza 2.Obținem $2021=11111100101_{(2)}=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^2+2^0$.Vor fi 8 plicuri. Primul colindător va lua plicurile 1 și 6 și are 257 lei, al doilea colindător plicurile 2 şi 7 şi are 516 lei, al treilea colindător plicurile 3 şi 8 şi are 1056 lei, al patrulea colindător ia plicul 4 cu 64 lei şi al cincilea plicul 5 cu 128 lei.Răspunsuri corecte: B,C,D,E.

2. Cinci cărţi şi trei caiete costă 124 lei, iar trei cărţi şi cinci caiete costă 84 lei. Câte cărţi s-au cumpărat cu 196 lei dacă au fost plătite 12 bucăţi?

A) 0	B) 4	C) 6	D) 8	E) 12

Soluţie: Opt cărţi şi opt caiete costă 208 lei .O carte şi un caiet costă 26 lei.Obţinem preţul unei cărţi 23 lei şi a unui caiet 3 lei.Dacă am cumpăra 12 caiete, am plăti 36 lei.Diferenţa dintre preţul unei cărţi şi preţul unui caiet este de 20 lei.S-au cumpărat $(196-36):20=8$ cărţi .Răspuns corect: D.

3. Prin scrierea tuturor numerelor naturale de la 1 la 2021, obţinem numărul natural $N=123456789101112\ldots201920202021$. Alegeţi răspunsurile corecte:

A) Pentru scrierea lui N s-au utilizat în total 2021 cifre.

B) A 2021-a cifră a numărului N este 1.

C) Pentru scrierea lui N s-a folosit de 602 ori cifra 7.

D) Pentru scrierea lui N s-a folosit de 628 ori cifra 2.

E) Numărul N are în total 6977 cifre.

Soluţie: Observăm că numărul N se obţine prin alăturarea a 9 numere de o cifră, 90 numere de două cifre 900 numere de trei cifre şi 1022 numere de patru cifre, deci are în total $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1022=6977$ cifre.Până la 9 utilizăm 189 cifre.Urmează 610 numere de trei cifre, pentru care utilizăm 1830 cifre, în total am ajuns la cifra cu numărul 2019, iar şirul continuă cu 710, deci a 2021-a cifră este 1. Pentru a scrie numerele de la 1 la 999, fiecare cifră nenulă se foloseşte de 300 de ori. Justificăm acest rezultat prin scrierea acestor numere cu trei cifre, după cum urmează:000,001,002,003,…,999. Fiecare cifră nenulă apare în mod egal. Până la 999 folosim 300 cifre de doi şi 300 cifre de 7. Pentru numerele de la 1000 până la 1999 punem doar cifra 1 în faţa numerelor anterioare, deci mai utilizăm încă 300 cifre de doi şi 300 cifre de 7. De la 2000 la 2021 mai folosim 26 cifre de 2 şi două cifre de 7. Deci, 626 cifre de 2 şi 602 cifre de 7. Răspunsuri corecte:B ,C şi E

4. Se pare că cea mai iubită şi mai folosită cifră este cifra 7. Este considerată magică, deoarece, de exemplu, există 7 minuni ale lumii antice şi curcubeul are 7 culori. Considerăm suma $S=7+7^2+7^3+\ldots+7^{2021}$. Folosiţi magia matematicii pentru a găsi răspunsurile corecte:

A) Ultima cifră a sumei S este 0.

B) Ultima cifră a sumei S este7.

C) Ultimele două cifre ale sumei S sunt 07.

D) Ultimele două cifre ale sumei S sunt 77.

E) Ultimele trei cifre ale sumei S sunt 707

Soluţie:
Observăm că $7^0+7^1+7^2+7^3=400$. Cum $2021=4\cdot 505+1$, vom obţine ultima cifră a sumei egală cu 7 şi ultimele două cifre 07. $S=7+400\left(7^2+7^6+...+7^{2018}\right)$.Cum ultima cifră a numărului $7^2+7^6+...+7^{2018}=7^{2+0\cdot 4}+7^{2+1\cdot 4}+\ldots+7^{2+504\cdot 4}$ este ultima cifră a numărului $505\cdot 9$ adică 5, obţinem $S=M_{1000}+7$ cu ultimele trei cifre 007.Răspunsuri corecte:B şi C.

5. Se dau numerele: $a=\left[27^{31}\cdot\left(3^9\right)^3-9^{60}\right]:9^{54}+3^0+1^{54}$ şi $b=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2021+2021^{0^{2021}}$.

Alegeţi răspunsurile corecte:

A) Restul împărţirii lui b la a este 0.

B) Nu se poate împărţi *a* la *b*.

C) Restul împărţirii lui *a* la b este 2.

D) Restul împărţirii lui *b* la a este 1.

E) Restul împărţirii lui *a*+*b* la 3 este 0.

<u>Soluție</u>: $a=\left[27^{31}\cdot\left(3^9\right)^3-9^{60}\right]:9^{54}+3^0+1^{54}a=\left(3^{93}\cdot3^{27}-3^{120}\right):9^{54}+2=0:9^{54}+2=2$,

$b=6n+1$, *n* număr natural mai mare decât 4 şi $a+b=6n+1+2=3(2n+1)$.

Răspunsuri corecte:C ,D şi E.

6. Dacă numerele $\overline{ab}$,c,*d*, sunt numere naturale pentru care $\overline{ab}\left(c^2+3\cdot d\right)=2021$ atunci suma $a+b+c+d$ poate fi :

A) 26	B) 25	C) 24	D) 22	E) 21

<u>Soluție</u>

Deoarece $2021=43\cdot47$ avem două cazuri.

I. $\overline{ab}=43$, $c^2+3\cdot d=47$,unde *c* poate lua cea mai mare valoare posibilă 6.Nu se obţin soluţii.

II. $\overline{ab}=47$, $c^2+3\cdot d=43$,unde *c* poate lua cea mai mare valoare posibilă 6. Se obţin soluţii doar pentru $c=1, c=2$ $c=4$ şi $c=5$ .Deci suma $a+b+c+d$ poate fi $4+7+1+14=26$, $4+7+2+13=26$, $4+7+4+9=24$ şi $4+7+5+6=22$.

Răspunsuri corecte:A,C şi D.

7.a) Scrieţi numărul 91^{91} sub forma x^2+y^3, cu $x, y\in\mathbb{N}, x\geq2, y\geq2$.

b) Demonstrați că există o infinitate de numere de forma a^a, unde $a\in\mathbb{N}^*$, care se pot scrie ca o sumă de două numere, unul pătrat perfect, iar celălalt cub perfect.

<u>Soluție</u>

a) $91^{91}=64\cdot91^{90}+27\cdot91^{90}=(8\cdot91^{45})^2+(3\cdot91^{30})^3$.

b) Luăm $a=36^n+1$.

Avem

$a^a=a^1\cdot a^{a-1}=(36^n+1)\cdot(36^n+1)^{36^n}\Rightarrow a^a=36^n(36^n+1)^{36^n}+(36^n+1)^{36^n}\Rightarrow a^a=[6^n\cdot(36^n+1)^{36^{n-1}\cdot18}]^2$ $+[(36^n+1)^{36^{n-1}\cdot12}]$, scriere care conduce la concluzie.