Colegiul Național "Ștefan cel Mare" Suceava
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA FILIALA SUCEAVA
CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ "CĂTĂLIN ȚIGĂERU"
Ediția XVIII, 11 decembrie 2021

Clasa a VI-a
Bareme

Problemele 1-6 sunt probleme tip grilă, ce conțin cinci răspunsuri posibile, iar numărul răspunsurilor corecte este cuprins între 1 și 5. Punctajul unei astfel de probleme poate fi:

- 0 puncte – dacă nu a fost dat niciun răspuns sau printre răspunsurile indicate există cel puțin unul incorect;
- 5 puncte – dacă toate răspunsurile indicate sunt corecte, dar lipsește cel puțin un răspuns corect;
- 10 puncte – dacă răspunsurile indicate coincid cu toate răspunsurile corecte ale problemei.

Pentru problema 7 se cere redactarea completă a soluției. Punctajul corespunzător acordat unei rezolvări corecte și complete este de 30 puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

1. Aflaţi perechile de numere naturale $(a,b), a>b$ care au suma dintre produsul lor şi diferenţa lor egală cu 2021. Alegeți răspunsurile corecte:

A) Dintre soluţii, 6 sunt perechi de numere prime între ele.

B) Dintre soluţii, 5 sunt perechi de numere prime între ele.

C) Oricare soluţie are numărul *a* sau numărul *b* multiplu de 3.

D) Există o soluţie pentru care *a*+*b* este pătrat perfect.

E) Există o soluţie pentru care *a*+*b* este cub perfect.

Soluție: $a\cdot b+a-b=2021 \Rightarrow (a-1)(b+1)=2020 \Rightarrow (a-1)(b+1)=2^2\cdot 5\cdot 101$
Sunt 12 divizori ai numărului 2020. Cum *a*>*b*, sunt 6 perechi
$(a,b)\in\{(102,19),(203,9),(405,4),(506,3),(1011,1),(2021,0)\}$.Răspunsuri corecte: B,C,D.

2. Pe tablă sunt scrise numerele 43 şi 47. O mişcare constă în scrierea pe tablă a încă unui număr natural, care este egal cu diferenţa a două numere de pe tablă, dacă acesta nu a fost deja scris. Pierde cel care nu mai poate muta.Alegeți răspunsurile corecte:

A) Câştigă primul jucător.
B) Câştigă al doilea jucător .
C) Se fac 43 mişcări.
D) Se fac 45 mişcări.
E) Se fac 47 mişcări.

Soluție: Folosind algoritmul lui Euclid,pe parcursul jocului vor fi scrise c.m.m.d.c. al numerelor 43 şi 47 şi toţi multiplii lui mai mici decât 47.Cum numerele sunt prime între ele, vor fi scrise toate numerele de la 1 până la 47.Se vor face 45 de mutări, câştigă primul jucător. Răspunsuri corecte: A şi D.

3. Fie *a*,*b*,*c* trei numere naturale nenule pentru care $4\cdot a+47\cdot b=43\cdot c$. Alegeți răspunsurile corecte:

A) 47 divide $a+c$.

B) Nu există numere naturale nenule pentru care $4\cdot a+47\cdot b=43\cdot c$.

C) 2021 divide $(a+b)(a+c)$.

D) 20 divide $\left(2^{2021}+3^{2021}+7^{2021}+8^{2021}\right)\cdot(c-b)$

E) 473 divide $\left(3^{2020}+10\right)\cdot(a+b)$

Soluție: Observvăm că , de exemplu, $a=42, b=1$ şi $c=5$ verifică egalitatea. Scriem egalitatea sub forma $4\cdot a+4\cdot c+47\cdot b=47\cdot c \Leftrightarrow 4(a+c)=47(c-b) \Rightarrow 47/4(a+c)$.Cum $(4,47)=1$, obţinem că $47/\ a+c$.Analog arătăm că $43/\ a+b$, dar $(43,47)=1$deci 2021/$(a+b)(a+c)$ .Ultima cifră a numărului $2^{2021}+3^{2021}+7^{2021}+8^{2021}$este 0, deci numărul se divide cu 5,$(4,5)=1$,în final 20 divide $\left(2^{2021}+3^{2021}+7^{2021}+8^{2021}\right)\cdot(c-b)$.

$3^{2020}+10=\left(3^5\right)^{404}+10=(242+1)^{404}+10=\left(M_{11}+1\right)^{404}+10=M_{11}+1+10=M_{11}$.Răspunsuri corecte A,C,D şi E.

4. Punctele *A*, *B*, *C*, *D* sunt situate pe o dreaptă în ordinea dată. Dacă $AB+AD=2\cdot AC$ şi $BD=2^{2^{2^2}}$ cm, atunci:

A) $AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD\cdot BC$.
B) $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.
C) $BC=2^7$ cm.
D) $BC=2^8$ cm.
E) $BC=2^{15}$ cm

Soluție: Notăm lungimea segmentelor $AB=a, BC=b, CD=c$.

$AB\cdot CD+AD\cdot BC=a\cdot c+(a+b+c)b=(a+b)(b+c)=AC\cdot BD$.Din $AB+AD=2\cdot AC$ oţinem *BC*=*CD*, deci $BC=2^{15}$ cm. Răspunsuri corecte: B şi E.

5. Se consideră unghiurile AOB, BOC ,*BOD* astfel încât $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare, $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOD$ sunt neadiacente complementare , $\sphericalangle COD=135^\circ$ iar $OE\perp OB$ astfel încât *E* şi *B* de aceeaşi parte a dreptei *AC*. Dacă (*OM* este bisectoarea unghiului *AOB* şi (*ON* bisectoarea unghiului *COE* Atunci:

A) Bisectoarele unghiurilor AOB, BOC nu sunt perpendiculare.

B) Bisectoarele unghiurilor AOD, DOC sunt perpendiculare.

C) Măsura unghiului AOB poate fi $22^\circ 30'$.

D) Măsura unghiului AOB poate fi $67^\circ 30'$.

E)) $\sphericalangle MON\equiv\sphericalangle COD$

Soluție:
Bisectoarele oricăror unghiuri adiacente suplementare sunt perpendiculare.

Cazul I. Punctele *B* şi *D* de o parte şi de alta a dreptei *AC*. Din $\sphericalangle COD = 135^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOD = 45^\circ$.
$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOD = 90^\circ \Rightarrow 2\sphericalangle AOB + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB = 22^\circ 30'$.
Cazul II. Punctele *B* şi *D* de aceeaşi parte a dreptei *AC*. Din $\sphericalangle COD = 135^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOD = 45^\circ$.
$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOD = 90^\circ \Rightarrow 2\sphericalangle AOB - 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB = 67^\circ 30'$.
Calculăm măsura unghiului *MON* $\sphericalangle AOB + \sphericalangle EOC = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sphericalangle AOB + \sphericalangle EOC\right) = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle MON = \sphericalangle MOB + \sphericalangle BOE + \sphericalangle EON = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$
Răspunsuri corecte: B,C,D şi E

6. Se consideră numărul de șase cifre $N = \overline{abcabc}$. Alegeți răspunsurile corecte:

A) 997997 este un număr de tip N cu număr minim de divizori.

B) 101101 este un număr de tip N cu număr minim de divizori.

C) 121121 este un număr de tip N cu număr minim de divizori.

D) 960960 este un număr de tip N cu un număr de divizori mai mare decât numărul de divizori ai numărului 720720.

E)990990 este un număr de tip N cu număr maxim de divizori.

<u>Soluţie</u>:Avem $N = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. N are cel mai mic număr de divizori, când $\overline{abc}$ număr prim sau când $\overline{abc}$ are ca factori unul dintre numerele 7,11,13.Numărul minim de divizori este 16. Numerele $997997 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 997$,$101101 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101$ şi $121121 = 7 \cdot 11^3 \cdot 13$, au 16 divizori. $960960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ are 224 divizori, $720720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ are 240 divizori, $990990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13$ are 144 divizori.

Răspunsuri corecte: A,B şi C.

7. a)Să se demonstreze că, pentru orice număr natural nenul n, 21^n se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte.

b) Scrieţi numărul 21^{2021} ca o sumă de cel puţin două cuburi perfecte

<u>Soluţie</u>:a)Se poate observa că $21 = 1^2 + 2^2 + 4^2$ şi, de exemplu,

$21^2 = 4^2 + 5^2 + 20^2$. Atunci
$21^{2n} = 4^2 \cdot 21^{2n-2} + 5^2 \cdot 21^{2n-2} + 20^2 \cdot 21^{2n-2} = \left(4 \cdot 21^{n-1}\right)^2 + \left(5 \cdot 21^{n-1}\right)^2 + \left(20 \cdot 21^{n-1}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi

$21^{2n+1} = 21^{2n} + 2^2 \cdot 21^{2n} + 4^2 \cdot 21^{2n} = \left(21^n\right)^2 + \left(2 \cdot 21^n\right)^2 + \left(4 \cdot 21^n\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) De exemplu, $21^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$ şi
$21^{2021} = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3) \cdot 21^{2019} = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3) \cdot \left(21^{673}\right)^3 =$

$\left(1 \cdot 21^{673}\right)^3 + \left(2 \cdot 21^{673}\right)^3 + \left(3 \cdot 21^{673}\right)^3 + \left(4 \cdot 21^{673}\right)^3 + \left(5 \cdot 21^{673}\right)^3 + \left(6 \cdot 21^{673}\right)^3$