Clasa a IX-a
Bareme

1. Minimul mulțimii de numere $\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{există } y,z \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-13=0\}$ este un număr din mulțimea:

A) $\{-4,-1\}$	B) $\{2,-1\}$	C) $\{1,-1\}$	D) $\{-4,1\}$	E) $\{-1,0\}$

Dan Popescu, Suceava

<u>Soluție:</u> Predicatul logic de definiție a mulțimii se scrie: $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=19$. Din analizarea tuturor cazurilor posibile se obține $|x+1| \in \{1,3\}$, de unde deducem că minimul se realizează pentru $x=-4$. Răspunsurile corecte sunt A și D.

2. Se consideră predicatul logic $p(x,y): \left[\frac{2x-1}{3}\right] = 2\left\{\frac{3y-1}{2}\right\}, x,y \in \mathbb{Z}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real *a*. Care dintre propozițiile logice următoare sunt adevărate?

A) $(\forall x)(\forall y)p(x,y)$.
B) $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$.
C) $(\exists x)(\forall y)p(x,y)$.
D) $(\forall y)(\exists x)p(x,y)$.
E) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$

Soluție: Deoarece $(\exists x)(\exists y)\neg p(x,y)$ este propoziție existențială adevărată (de pildă, se aleg x=5 și $\forall y \in \mathbb{Z}$ arbitrar, rezultând imposibilitatea $3 = 2\left\{\frac{3y-1}{2}\right\}$), enunțurile de la „a", „b" și „c" sunt logic false. Cum $\left\{\frac{3y-1}{2}\right\} \in [0,1), \forall y \in \mathbb{R}$, faptul că aserțiunea „d" este propoziție adevărată decurge din evidența că ecuațiile $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = 0$ și $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = 1$ au ambele soluții în $\mathbb{Z}$ (suficient chiar x=1 și x=2). Deoarece premisa $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ este falsă, implicația de la „e" este adevărată. Variantele corecte sunt D și E.

3. . Numerele reale x,y,z satisfac $x^2+yz \le \frac{8}{9}$, $y^2+zx \le \frac{8}{9}$ și $z^2+xy \le \frac{8}{9}$. Atunci produsul dintre minimul și maximul sumei $s=x+y+z$ este un număr real *p* ce satisface:

A) $\lvert p\rvert \le 2$	B) $\lvert p\rvert \le 3$	C) $\lvert p\rvert \le 4$	D) $\lvert p\rvert \ge 3$	E) $\lvert p\rvert \ge 5$

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Sumând membru cu membru inegalitățile, se obține $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \le \frac{8}{3}$ sau $\frac{8}{3} \ge (x+y+z)^2 - (xy+yz+zx) \ge (x+y+z)^2 - \frac{1}{3}(x+y+z)^2$, adică $|s| \le 2$, de unde variantele de menționat sunt C și D.

4. **4.** Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale nenule care verifică condiţiile $a+\frac{b}{1+a}+\frac{c}{1+a+b}+\frac{d}{1+a+b+c}=8$ şi $a+b+c+d=80$ este:

A) 1	B) 2	C) 4	D) mai mic sau egal cu 10	E) 8

Dan Nedeianu, Drobeta - Turnu Severin

Soluție: Adunând membrilor egalităţii numărul 4 , prima relație se mai scrie e$= a+1+\frac{1+a+b}{1+a}+\frac{1+a+b+c}{1+a+b}+\frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c}=12$. Aplicând inegalitatea mediilor,

$$e \ge 4\sqrt[4]{(1+a)\frac{(1+a+b)}{1+a}\cdot\frac{(1+a+b+c)}{1+a+b}\cdot\frac{(1+a+b+c+d)}{1+a+b+c}}, \text{ adică } e \ge 4\cdot\sqrt[4]{1+80} \text{ sau } e \ge 12.$$

Prin urmare, apare cazul de egalitate în inegalitate, deci $a+1=\frac{1+a+b}{1+a}=\frac{1+a+b+c}{1+a+b}=\frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c}=4$ sau $a=2, b=6, c=18, d=54$. Variantele corecte sunt B şi D.

5. În trapezul *ABCD* bazele sunt (*AB*) și (*CD*), *AB = 2CD*. Dacă $M \in (AB), AM = xAB, P \in (DM), DP = yDM$ și *A*, *P* și *C* sunt puncte coliniare, atunci relația între numerele x și y este :

A) $\frac{2y}{1-y}=x^{-1}$	B) $y=(1+2x)^{-1}$	C) $y=1+2x$	D) $x=1+2y$	E) $x=(1+2y)^{-1}$

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Cum $\overrightarrow{DP} = y\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{DA}+y\,\overrightarrow{AM}$, rezultă $\overrightarrow{AP} = (1-y)\,\overrightarrow{AD}+xy\,\overrightarrow{AB}$. Dar și vectorul $\overrightarrow{AC}$ se exprimă în mod unic în baza $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ prin $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Din coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{AP}$ și $\overrightarrow{AC}$ se deduce 1-y =2xy sau $y=(1+2x)^{-1}$. Variante valide: A și B.

6. Triunghiul ascuțitunghic *ABC* are lungimile laturilor $BC=a,\ AC=b,\ AB=c$ și semiperimetrul $p=\frac{a+b+c}{2}$. Dacă vectorul $\overrightarrow{AD}$ este $\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$, atunci numărul $\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$ este:

a) $2bcp(p-a)$; b) $4bcp(p-a)$; c) $4abc(p-a)$; d) $2abc(p-b-c)$; e) $4a(p-b)(p-c)$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Dacă $b\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}$ și $c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}$, triunghiul AEF fiind isoscel, patrulaterul AEDF este romb cu unghiul $\widehat{AED}$ obtuz. De exemplu, în triunghiul AED,

$AD^2=2AE^2-2AE^2\cos(\widehat{AED})=2AE^2+2AE^2\cos(\hat{A})=2b^2c^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=4pbc(p-a)$. Varianta „B”.

7. Să se determine numerele $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\sqrt{\frac{x-1}{4x+5}}$ este număr rațional.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Se observă că $x=1$ este o soluție ………………………………..5 p

Dacă considerăm numerele $a,b\in\mathbb{Z}^*,(a,b)=1,ab>0$ astfel încât $\sqrt{\frac{x-1}{4x+5}}=\frac{a}{b}$, atunci $\frac{x-1}{4x+5}=\frac{a^2}{b^2}$ și

$-x=\frac{b^2+5a^2}{4a^2-b^2}=\frac{b^2-4a^2}{4a^2-b^2}+\frac{9a^2}{4a^2-b^2}\in\mathbb{Z}$ …………… ……... 5 p

Se deduce $4a^2-b^2/9a^2$. Deoarece $(4a^2-b^2,a^2)=1$ rezultă în mod necesar $4a^2-b^2/9$ ....10 p

Analiza cazurilor deduse din $(2a-b)(2a+b)$ divide 9, conduce la concluzia $\frac{a}{b}\in\left\{\frac{-2}{5},\frac{2}{5},1,-1\right\}$

finalizată cu obținerea soluțiilor, $x=5$ și $x=-2$ ………………………………………………… 10 p